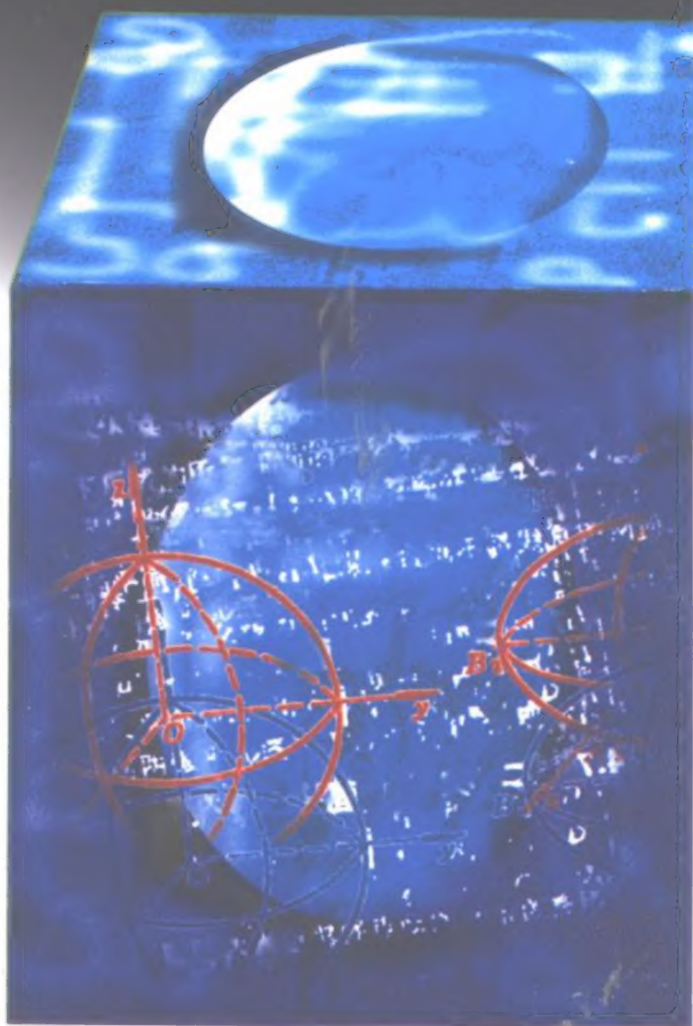
马建忠　赵玉荣　主编

高等院校选用教材・医药类

医学高等数学

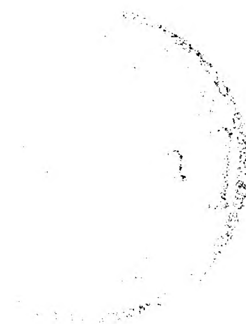


科学出版社

高等院校选用教材·医药类

医学高等数学

马建忠　赵玉荣　主编



科学出版社
1999



内 容 简 介

本书依据普通高等医学院校数学教学要求编写而成，书中讲述了微积分学、常微分方程、概率论及线性代数等方面的基础知识，重点突出了基本概念和数学方法。书中结合具体的医学问题给出了例题和习题，并介绍了借助计算机工具，用数学方法处理医学实际问题。

本书可供高等医学院校作数学教材使用，也可供医学工作者参考。

图书在版编目(CIP)数据

医学高等数学/马建忠，赵玉荣主编. －北京：科学出版社，1999.8
(高等院校选用教材系列)
ISBN 7-03-007549-8

Ⅰ.医… Ⅱ.①马… ②赵… Ⅲ.医用数学-医学院校-教材 Ⅳ.R311

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 17424 号

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
北京双青印刷厂 印刷
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
*
1999 年 8 月第 一 版 开本：787×1092 1/16
1999 年 8 月第一次印刷 印张：17
印数：1-7 000 字数：381 000

定价：23.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉)

前　言

自1953年,沃森(J.D.Walson)等建立DNA双螺旋结构分子模型以来,医学和生物学的数学化进展迅猛。耗散结构理论,免疫网络理论,以及用微分方程组研究神经纤维的行为与神经冲动的传导分别荣获诺贝尔奖;借助电子计算机快速计算,按一定数学方法,由X射线的投影函数重建人体断层数字图像的X-CT成为医学影像的一次革命。这些足以表明数学是现代医学研究必不可少的工具。

《医学高等数学》的内容包含了医学研究中所涉及到的高等数学基础和高等数学方法。它是医学各门学科的基础课,为医学院校学生提供必备的数学素质教育;同时为研究医学实际问题和生命现象(或过程)的数量规律提供重要的数学基础知识。

为了适合我国医学院校实际情况和特点,满足21世纪医学教育改革发展的需要,原《医用高等数学》改名为《医学高等数学》,并在本书编写过程中重点突出如下特点:精炼教材内容,在有限学时内,给学生建立较广泛的数学基础知识;在坚持数学素质教育的原则下,兼顾数学自身理论体系,削减过多过难的理论推导,着重阐明基本概念和数学方法;坚持和增加用高等数学方法处理常见易懂的医学问题,使学生容易地理解数学与医学的联系;适当地开展数值计算和线性代数在计算机上的应用;力求做到重点突出,层次分明,深入浅出,行文流畅,说理透彻,图表清楚,便于自学。

另外,本书首次从实践到理论上论述概率密度曲线下的面积就是概率;并在许多地方把医学问题、数学方法和计算机计算技术融合在一起,启动学生创造性思维。

全书共分八章,其内容有一元函数微积分、多元函数微积分、常微分方程、概率论、线性代数,并配有适当习题,附有习题答案以及常用数学表。此书一般在大学第一个学期讲授,总学时为84学时,可对有*号的内容作筛选或安排自学。数学学时较少的高等医学院校,各章节的取舍可自行调整。《医学高等数学》适用于作医学院校各类专业的必修课教材,研究生选修课教材,也可作为医学夜大基础课教材,同时可供医学研究人员参考。

本书在编写、出版过程中得到各参编学校的领导、教务处领导以及科学出版社的全力支持和帮助,在此一并致谢。

由于编者水平有限、经验不足,时间仓促,难免存在缺点和错误,衷心欢迎各界同仁和读者批评指正。

马建忠

1999年4月于沈阳

目　　录

第一章　函数、极限与连续

函数是高等数学研究的主要对象之一。本章从函数出发，用运动和变化的观点来研究函数极限和连续。函数极限是高等数学的一个重要工具，高等数学中的许多概念和理论都是以极限为基础的，正因为有了极限才使高等数学与初等数学有了本质差异。函数的连续性是函数可微的必要条件，又是函数可积的充分条件，因此连续函数是高等数学研究的主要函数。本章主要介绍三部分内容：函数、函数极限和函数的连续性，为后继章节奠定基础。

1.1　函数

1.1.1　函数的概念

一、常量与变量

在某一变化过程中始终保持相对静止状态的量称为常量(constant quantity)；时时处于变化着的量称为变量(variable)。前者记为 a、b、c 等，后者记为 x、y、t 等。如在一般情况下，人体器官的个数为常量，而人的身高、体重随年龄而变化，因此它们均为变量。

常量与变量的区分不是绝对的，而是相对的。这依当时所考虑问题的条件而定。如人的身高，在 1 天内就可认为是常量，而在 1 年内它就是变量；重力加速度，对某一固定地点来说，它是一个常量，而对不同地点来说可视之为变量。又如在圆的半径增加过程中，其周长和面积都是变量，而周长与直径之比却是常量(即为 π)。

二、函数的概念

在某一变化过程中，变量之间的关系往往不是孤立存在的，而是相互影响和相互制约的，它们彼此之间存在着一种确定的对应关系，这种关系在数学上概括为函数关系。

【定义 1】　设在某个变化过程中存在两个变量 x、y，若对于 x 变化范围内的每一个值，按照某一确定的关系 f 都有唯一一个实数 y 与之对应，则称变量 y 是变量 x 的函数(function)。记为 $y=f(x)$或 $y=y(x)$。其中 x 称为自变量(independent variable)，y 称为因变量(dependent variable)。x 的取值范围称为函数的定义域(domain of definition)，通常用 D 表示；y 的取值范围称为函数的值域(domain of functional value)，通常记为 R，即 $R=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$。

函数的定义有两个要素：一是自变量 x 必须有明确的定义域D；二是在定义域范围内，变量 x 与 y 有确定的对应关系，这两个要素决定值域 R。如果两个函数相等，必须这两个要素完全相同。

考查函数 $y=2(x+1)$与函数 $y=2(x^2-1)/(x-1)$是否相等。虽然两个函数的对

应关系相同，但它们的定义域不同，前者的定义域是$(-\infty,+\infty)$，后者的定义域是$(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$，从而决定了它们的值域也不同，所以这两个函数不相等。

函数概念中两个变量之间的对应关系有很多表达方式，常见有三种：解析法、表格法和图表法。高等数学重点研究的是解析法。因此，在医学高等数学中所接触到的两个变量之间的对应关系一般用解析法表示。

在解析法中，如果函数$f(x)$在x_0处有定义，则通常记为$y(x_0)$、$f(x_0)$或$y|x=x_0$。解析法表示的函数$f(x)$在平面直角坐标系中表示一条平面曲线。

例 1 求函数$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}+\arcsin(\dfrac{x}{2}-1)$的定义域。

解： 此函数的定义域是由函数$\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$和函数$\arcsin(\dfrac{x}{2}-1)$的定义域交集所确定。要使函数$\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$有意义，必须使$4-x^2>0$，即$|x|<2$，其定义域为$(-2,2)$；对于函数$\arcsin(\dfrac{x}{2}-1)$，必须保证$|\dfrac{x}{2}-1|\leqslant 1$，即$0\leqslant x\leqslant 4$，其定义域为$[0,4]$，因此$f(x)$的定义域为$(-2,2)\cap[0,4]=[0,2)$。

例 2 已知函数$f(x)=x^2+1$，求$f(2)$、$f[f(x)]$。

解： $f(2)=2^2+1=5$

$f[f(x)]=[f(x)]^2+1=(x^2+1)^2+1=x^4+2x^2+2$

例 3 已知函数$f(x)=x^2-3x+2$，求$f(x)$。

解： 利用变量代换法求$f(x)$。令$x+1=t$，则$x=t-1$，将其代入原式，得$f(t)=(t-1)^2-3(t-1)+2=t^2-5t+6$，所以$f(x)=x^2-5x+6$。

在研究函数时，经常用到一点的邻域概念。所谓邻域是指如果x_0是实数轴上一点，δ为正实数，则开区间$x_0-\delta<x<x_0+\delta$称为点x_0的邻域(neighbourhood)，记为$\cup(x_0,\delta)=\{x \mid |x-x_0|<\delta\}$。

1.1.2 函数的特性

一、单调性

设函数$f(x)$的定义域为D，如果在D中某一个子区间I中任意取两个值x_1和x_2，当$x_1<x_2$时，有$f(x_1)<f(x_2)$（或$f(x_1)>f(x_2)$），则称函数$f(x)$在区间I上是单调增加（或单调减少）的。单调增加函数和单调减少函数统称为单调函数(monotone function)。

如$y=x^3$在区间$(-\infty,+\infty)$上是单调增加的；而$y=\sin x$在$[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}]$上是单调增加的，在$[\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}]$上是单调减少的。

单调函数图像的特点是：单调增加函数对应的曲线随自变量x的逐渐增大而上升，见图1-1(a)；单调减少函数对应的曲线随自变量x逐渐增大而下降，见图1-1(b)。

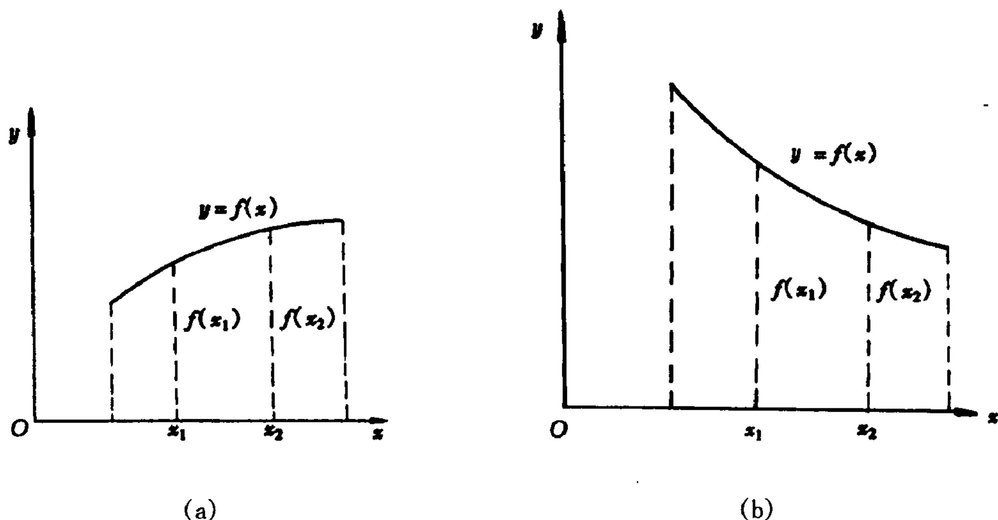


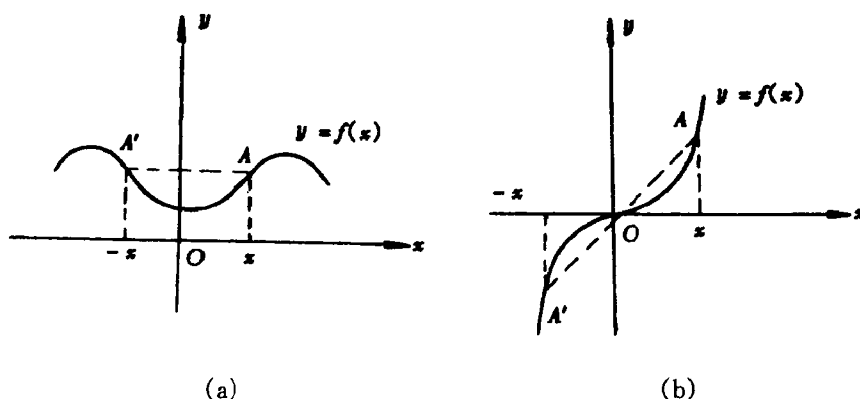
图 1-1

二、奇偶性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称（即若 $x\in D$，则 $-x\in D$），如果对 D 内任意一点 x，都满足 $f(-x)=f(x)$，则称函数 $f(x)$ 在 D 内是偶函数(even function)，若函数 $y=f(x)$ 对定义域 D 内任意一点 x，都满足 $f(-x)=-f(x)$，则称函数 $f(x)$ 在 D 内是奇函数(odd function)。

如 $y=x^2$ 在其定义域 $(-\infty,+\infty)$ 上是偶函数；$y=\sin x$ 在其定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内是奇函数；$y=\sin x+\cos x$ 在其定义域 $(-\infty,+\infty)$ 上非奇非偶。

偶函数的图像是关于 y 轴对称，如图 1-2(a)，奇函数的图像是关于原点对称，如图 1-2(b)。



(a)　　(b)

图 1-2

三、有界性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，如果存在一个正数 M，使得对于 D 中某一个子区间 I 内

任意一点 x，总有 $|f(x)|\leqslant M$（即 $-M\leqslant f(x)\leqslant M$），则称函数 $f(x)$ 在 I 上是有界函数(bounded function)，否则是无界函数(unbounded function)。

如 $\sin x$、$\cos x$ 对区间 $(-\infty,+\infty)$ 上任意一点 x，存在 $M=1$，使得 $|\sin x|\leqslant M$，$|\cos x|\leqslant M$，所以它们在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上都是有界函数。同时也可以看出，只要 M 存在，个数就不唯一，如 2,2.8,3.6,…都可作为正弦函数和余弦函数的界。$\ln x$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上为无界函数，因为找不到那样一个正数 M，使 $|\ln x|\leqslant M$ 成立。

一个函数有界还是无界，必须指明所考虑的区间，因为同一个函数在某个区间上可能是有界函数，但在另一个区间上却可能是无界函数。如 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在开区间 $(0,1)$ 上是无界函数，但在闭区间 $[1,2]$ 上却是有界函数，因为在此区间上能找到 $M\geqslant 1$，使当 $x\in[1,2]$ 时，$\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant M$ 成立。

四、周期性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，如果存在一个非零常数 T，使得对于任意一点 $x\in D$，$f(x+T)=f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 在 D 上为周期函数(periodic function)，T 称为 $f(x)$ 的周期。通常所说的周期是指最小正周期。

如 $\sin x$、$\cos x$ 均为周期函数，它们的最小正周期为 2π；$\operatorname{tg}x$、$\cot x$ 也是周期函数，它们的最小正周期为 π。

周期函数的图像特点是在这函数的定义域内，每个长度为周期 T 的区间上，函数所对应的曲线有相同的形状，如图 1-3。

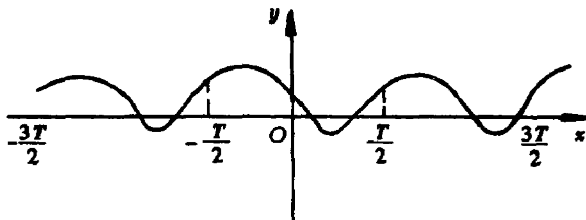


图 1-3

1.1.3 初等函数

一、基本初等函数

基本初等函数(basic elementary function)通常是指幂函数(power function)、指数函数(exponential function)、对数函数(logarithmic function)、三角函数(trigonometric function)和反三角函数(anti-trigonometric function)。

它们的表达式、定义域、图像及主要性质见表 1-1。

表 1-1 基本初等函数表

函数名称	表达式	定义域	图像	主要性质
幂函数	$y=x^{\alpha}$	α 取值不同函数的定义域不同		图像都经过(1,1)点，α 为偶数时，图像关于 y 轴对称 α 为奇数时，图像关于原点对称 α 为负数时，图像在原点间断
指数函数	$y=a^x$ $\begin{pmatrix}a>0\\a\neq1\end{pmatrix}$	$(-\infty,+\infty)$		图像都经过点(0,1)，当 $a>1$ 时，a^x 为增函数 当 $0<a<1$ 时，a^x 为减函数
对数函数	$y=\log_a x$ $\begin{pmatrix}a>0\\a\neq0\end{pmatrix}$	$(0,+\infty)$		图像都经过点(1,0)，当 $a>1$ 时，$\log_a x$ 为增函数 当 $0<a<1$ 时，$\log_a x$ 为减函数
三角函数	$y=\sin x$ $y=\cos x$ $y=\mathrm{tg}x$ $y=\cot x$	$(-\infty,+\infty)$ $(-\infty,+\infty)$ $x\in R$ $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$ $x\in R$ $x\neq k\pi$		奇函数，有界函数周期 $T=2\pi$ 偶函数，有界函数周期 $T=2\pi$ 奇函数，周期 $T=\pi$ 奇函数，周期 $T=\pi$
反三角函数	$y=\arcsin x$ $y=\arccos x$ $y=\mathrm{arccot}x$ $y=\mathrm{arccot}x$	$[-1,1]$ $[-1,1]$ $(-\infty,+\infty)$ $(-\infty,+\infty)$		奇函数，增函数 非奇非偶，减函数 奇函数，增函数 非奇非偶，减函数

二、复合函数

自由落体运动的动能 $E=\frac{1}{2}mv^2$，其中 m 为质点的质量，v 为质点的速度，而 $v=gt$，其中 g 为重力加速度，我们称 $E=\frac{1}{2}m(gt)^2$ 是由 $E=\frac{1}{2}mv^2$ 和 $v=gt$ 复合而成的 t 的复合函数。v 称为中间变量，t 为自变量。

一般所遇到的多数函数在结构上往往是由一些基本初等函数经过有限次的复合而构成的，下面给出复合函数的一般定义。

【定义 2】 设函数 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$，且 $u=\varphi(x)$ 的值域全部在 $y=f(u)$ 的定义域内，则称 $y=f[\varphi(x)]$ 是由这两个函数经过中间变量(intermediate variable) u 而构成 x 的复合函数(compound function)，其中 x 为自变量，简称函数 $y=f[\varphi(x)]$ 是 x 的复合函数。

如 $y=\ln u$，$u=x-1$ 在 $x>1$ 时复合成的函数为 $y=\ln(x-1)$。

把一个复合函数进行分解非常重要，掌握分解便于今后研究复合函数的导数、微分与积分。分解复合函数的要点是使所分解出来的每一个函数都是基本初等函数或基本初等函数的四则运算所构成的函数，若中间的某一项又是复合函数，则应对它再进行分解。

如复合函数 $y=\arcsin[\lg(x-1)]$ 可分解为函数 $y=\arcsin u$，$u=\lg v$，$v=x-1$，所以中间变量可以是多个变量；又如 $y=x^4$ 可分解成 $y=u^2$，$u=x^2$，也可分解成 $y=u^{\frac{4}{3}}$，$u=x^3$，因此复合函数的分解并不唯一。

三、初等函数

【定义 3】 由基本初等函数经过有限次的四则运算和复合运算而构成并由一个式子表示的函数称为初等函数(elementary function)

如 $\arcsin[\lg(x-1)]$，多项式函数 $p(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$，双曲正弦函数 $\frac{e^{-x}-e^x}{2}$、双曲余弦函数 $\frac{e^{-x}+e^x}{2}$ 等等都是初等函数，但下面将介绍的分段函数就不是初等函数。

1.1.4 分段函数与反函数

一、分段函数

在定义域内不同的区间上，由不同解析式所表示的函数称为分段函数(piecewise function)。如符号函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$$

以及函数 $y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$ 都是分段函数，而不是初等函数。

二、反函数

在多数情况下,通常是用因变量表示成自变量的函数,但有时研究问题时,需要把自变量表示成因变量的函数,这就产生了反函数的概念。

【定义 4】 设函数 $y=f(x)$的定义域为 D,值域为 R,若对于任意一个 $y\in R$,有唯一一个 $x\in D$,使 $f(x)=y$ 成立,则 x 与 y 的对应关系在 R 上定义了一个新函数,称为函数$y=f(x)$的反函数,记为 $x=f^{-1}(y)$。

若把函数 $y=f(x)$称为直接函数,则直接函数的定义域(或值域)恰好是它的反函数 $x=f^{-1}(y)$的值域(或定义域)。在一般情况下,如果$y=f(x)$在某个区间上有定义且是单调函数,就能保证它的反函数 $x=f^{-1}(y)$存在。

例如 $y=a^x(a>0,a\neq1)$在定义域$(-\infty,+\infty)$上是单调函数,它的值域是$(0,+\infty)$,所以它的反函数 $x=\log a^y$ 存在,其定义域是$(0,+\infty)$,即 $y\in(0,+\infty)$,值域是$(-\infty,+\infty)$。

一般习惯上自变量用 x 表示,因变量用 y 来表示,这时 $y=f(x)$的反函数 $x=f^{-1}(y)$就可以写成 $y=f^{-1}(x)$。如函数 $y=a^x$ 的反函数一般不写成$x=\log a^y$,习惯上写成$y=\log a^x$。

直接函数 $y=f(x)$与其反函数 $x=f^{-1}(y)$的图像是相同的,但由于互换了 x 与y 的位置,所以 $y=f(x)$的图像与其反函数 $y=f^{-1}(x)$的图像就不同了,这时它们的图像在同一直角坐标系中是关于直线 $y=x$ 为对称曲线。如图 1-4 所示。

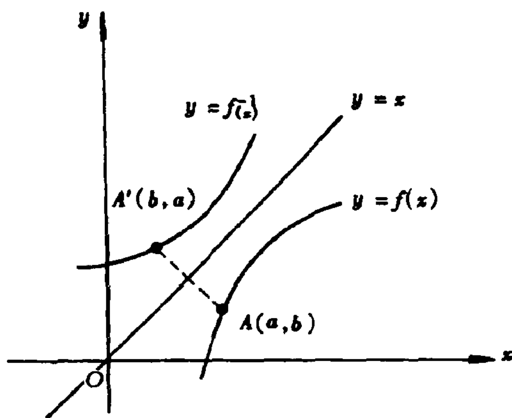


图 1-4

1.2 函数的极限

极限在高等数学中至关重要,许多概念如连续、导数、定积分和级数都是以极限为基础的,可以说它基本上贯穿整个高等数学的内容。本节主要介绍数列极限和函数极限及它们的运算。

我们知道,半径为 r 的圆内接正 n 边形面积为 $S_n=f(n)$,当边数 n 越来越大时,S_n 就越来越接近圆的面积,当 n 无限增大时,S_n 就是圆的面积 πr^2。这种思想是我国古代数学家刘徽(公元前 3 世纪)提出来的,这就是本节研究的极限概念。

1.2.1 数列极限

一、数列极限

当自变量按自然数 1,2,3,…依次顺序增大时,函数值按一定的法则排列的一列数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 称为数列(sequence of number),记为$\{x_n\}$。因此数列是以自然数集为定义域的一种特殊的函数。

例 4 以下例子均为数列、见表 1-2 所示。

表 1-2

序号	数　　列	数列图像
(1)	$\{x_n\}=\left\{\frac{1}{n}\right\}:1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots$	
(2)	$\{x_n\}=\left\{1+\frac{1}{n}\right\}:2,\frac{3}{2},\frac{4}{3},\cdots,1+\frac{1}{n},\cdots$	
(3)	$\{x_n\}=\left\{1+\frac{(-1)^n}{n}\right\}:,0,\frac{3}{2},\frac{2}{3},\cdots 1+\frac{(-1)^n}{n},\cdots$	
(4)	$\{x_n\}=\{(-1)^n\}:-1,1,-1,\cdots(-1)^n,\cdots$	

在这些数列中,我们不仅要知道 n 取每一个值时,对应数列 x_n 的取值情况,而且还要知道当自变量 n 越来越大时,数列 x_n 的变化趋势。从表 1-2 中看到,例 4(1)中,当 $n\to\infty$时,数列$\left\{\frac{1}{n}\right\}$越来越接近于零,在例 4(2)中,当 $n\to\infty$时,数列$\left\{1+\frac{1}{n}\right\}$越来越接近于 1,在例 4(3)中,当 $n\to\infty$时,数列$\left\{1+\frac{(-1)^n}{n}\right\}$越来越接近于 1,只不过是摆动地接近于 1,而例 4(4)中,数列$\{(-1)^n\}$ 当$n\to\infty$时,不趋向一个确定的常数。

【定义 5】 对于数列$\{x_n\}$,如果当 n 无限增大时,数列 x_n 无限接近某一个确定的常数A,则称 A 为数列x_n 的极限(limit),或称数列 x_n 收敛于 A,记为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$ 或$x_n\to A$ $(n\to\infty)$,否则称数列 x_n 发散(divergence)。

根据定义 5 知 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0,\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1,\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)=1$,数列$\{(-1)^n\}$是发散的。

根据数列极限定义,例 4(1)、(2)、(3)中,数列 x_n 无限接近某一个确定的常数A 是指数列 x_n 与常数A 要多近有多近,也就是说当 $n\to\infty$时,$|x_n-A|$要多小有多小,而刻画$|x_n-A|$要多小有多小通常用希腊字母 ε(读作 epsilon)来表示($\varepsilon>0$),即$|x_n-A|<\varepsilon$,因此定义 5 可以表述为:"对预先给定的任意小的正数 ε,总存在某一项,对这项以后所有的 x_n,都有不等式$|x_n-A|<\varepsilon$ 成立。"

例如对例 4(1)中数列$\left\{\frac{1}{n}\right\}$来说,当 $n\to\infty$时,$|x_n-A|=\left|\frac{1}{n}-0\right|$能任意地小。比如说,要想$\left|\frac{1}{n}-0\right|=\frac{1}{n}<0.01$,只要 $n>100$ 就行,因此上面所说的某一项就是 100 项,从第 100 项以后所有的项 $x_n=\frac{1}{n}$,都能使$\left|\frac{1}{n}-0\right|<0.01$,这里的 0.01 就相当于预先给定的任意小的正数 ε,同理取 $\varepsilon=0.0001$ 就可以找到第 10 000 项,从 10 000 项以后所有的 $x_n=\frac{1}{n}$,都能使$\left|\frac{1}{n}-0\right|<0.0001$成立。

例 5 讨论数列 $x_n=2^n$ 的极限。

解: 给定数列 $x_n=2^n$,即 $2,4,8,\cdots,2^n,\cdots$,当 $n\to\infty$时,$x_n=2^n$ 的数值无限增大,即它不趋向于一个确定的常数,所以数列 $x_n=2^n$ 是发散的。

1.2.2 函数极限

由于函数的变化与自变量的变化有关,因此我们就自变量不同的变化情况来研究函数极限的定义,即在函数极限中,分别研究两种极限过程:一种是自变量趋于无穷大,另一种是自变量趋于一个确定的数。

一、$x\to\infty$时,函数 $f(x)$的极限

数列是一种特殊的函数,那么数列极限当然是一种特殊的函数极限,如数列 $x_n=\frac{1}{n}$,当 $n\to\infty$时,它以 0 为极限。现在让自变量 x 连续取值且无限趋于$+\infty$,对应的函数值$f(x)=\frac{1}{x}$无限趋于零,仿数列极限定义 5,称零为函数 $f(x)=\frac{1}{x}$当$x\to+\infty$时的极限。当 $x\to-\infty$时,$f(x)=\frac{1}{x}$也以零为极限,即当 $x\to\pm\infty$(简记 $x\to\infty$)时,$f(x)=\frac{1}{x}$均以零为极限。如图 1-5 所示。

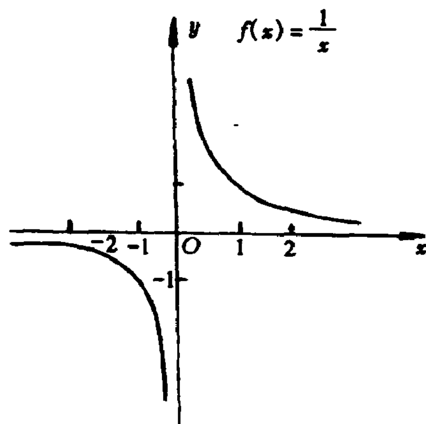


图 1-5

【**定义 6**】 如果当 x 的绝对值无限增大(记为 $x\to\infty$)时,函数 $f(x)$无限趋近于某一个确定的常数 A,则称 A 为函数$f(x)$的极限,记为

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \text{ 或} f(x)\to A(\text{当 } x\to\infty)$$

从定义 6 上看，当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)\to A$ 表示随着 $|x|$ 的无限增大，曲线 $f(x)$ 与直线 $y=A$ 要多近有多近，也就是说 $|f(x)-A|$ 要多小有多小，即对预先给定的任意小的正数，当 $|x|$ 无限增大时，不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立。

在定义 6 中，自变量 x 的绝对值无限增大是指 $x\to\pm\infty$，但有时根据研究问题的需要，分别考虑 $x\to+\infty$ 或 $x\to-\infty$。例如当 $x\to+\infty$ 时，函数 $\mathrm{arctg}x\to\frac{\pi}{2}$，当 $x\to-\infty$ 时，函数 $\mathrm{arctg}x\to-\frac{\pi}{2}$，如图 1-6 所示。又如 $\lim\limits_{x\to+\infty}2^{-x}=0$，$\lim\limits_{x\to-\infty}2^{-x}=+\infty$（即极限不存在），如图 1-7 所示。

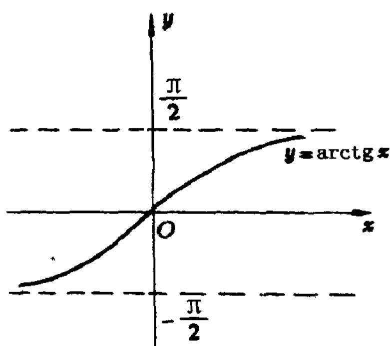


图 1-6

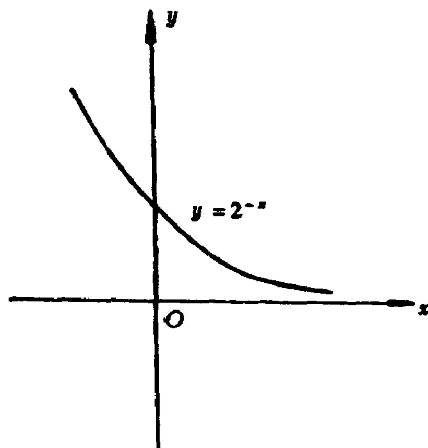


图 1-7

二、$x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限

自变量 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限与 $x\to\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限的区别只是自变量 x 的变化趋势不同。

【定义 7】 设函数 $f(x)$ 在 x_0 点的某个邻域（可以不考虑 x_0 点）内有定义，如果当自变量 x 无限接近点 x_0（但 $x\neq x_0$）时，函数值无限接近某一个确定的常数 A，则称 A 为函数 $f(x)$ 的极限，记为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A$（当 $x\to x_0$）。

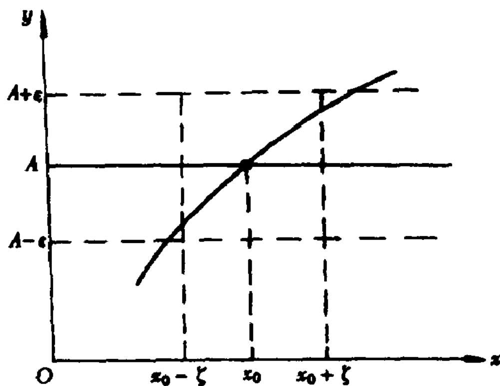


图 1-8

从图 1-8 上看出，在点 x_0 的 δ 邻域 $x_0-\delta<x<x_0+\delta$ 内，当 $x\to x_0$ 时，曲线 $f(x)$ 与直线 $y=A$ 要多近有多近，也就是说 $|f(x)-A|$ 要多小有多小，即对于预先给定的任意小的正数 ε，不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立。

例 6 考查函数 $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$ 当 $x\to 0$ 时的极限。

解： 函数 $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$ 在 $x=0$ 时无意义，但 $\left|x\sin\frac{1}{x}-0\right|=\left|x\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant|x|\to 0$（当 $x\to 0$

时)，所以 $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0$。这说明一个函数 $f(x)$ 在 x_0 点有无极限与 $f(x)$ 在 x_0 点有无定义无关，同时也说明求函数值与求极限值是不同的。因此定义 7 中只要求函数 $f(x)$ 在 x_0 点的某个邻域内有定义，并且可以不考虑 x_0 点。

定义 7 中，$x\to x_0$ 并不限定 x 的变化方向，它即可以从 x_0 点的左侧趋于 x_0，也可以从 x_0 点的右侧趋于 x_0，有时 x 还只能从一个方向趋于 x_0 点，如果仅从 x_0 点的左侧趋于 x_0，记 $x\to x_0-0$，这时的极限称为 $f(x)$ 在点 x_0 的左极限(left limit)，记为 $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=A$，类似可以定义右极限(right limit)，记为 $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=A$。函数的左右极限统称为单侧极限(one-sided limit)。

显然，当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 极限存在的充分必要条件是函数 $f(x)$ 的左、右极限同时存在且相等。即 $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=A$。因此如果函数 $f(x)$ 的左右极限至少有一个不存在或这两个极限都存在但不相等，这时函数 $f(x)$ 的极限就不存在。

例 7 设函数

$$f(x)=\begin{cases}2x, & \text{当 } x<0\\ 0, & \text{当 } x=0\\ x-1, & \text{当 } x>0\end{cases}$$

试讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 点的极限。

解：

$$\lim_{x\to 0-0} f(x)=\lim_{x\to 0-0}(2x)=0$$

$$\lim_{x\to 0+0} f(x)=\lim_{x\to 0+0}(x-1)=-1$$

$$\lim_{x\to 0-0} f(x)\neq\lim_{x\to 0+0} f(x)$$

所以函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 点极限不存在。

1.2.3 无穷小量

由于函数极限与无穷小量密切相关，因此引入无穷小量的概念。

一、无穷小量的概念

【定义 8】 如果 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(\text{或}x\to\infty)}} f(x)=0$，则称 $f(x)$ 为 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时的无穷小量(infinitesimal)，简称无穷小，此时也称函数 $f(x)$ 收敛于零。

言简之，以零为极限的函数称为无穷小量。如 $x\to 0$ 时，x、x^2、$\sin x$ 都是无穷小；当 $x\to+\infty$ 时，e^{-x} 是无穷小；当 $n\to\infty$ 时，$\frac{1}{x}$ 是无穷小；$n\to\infty$ 时，$\frac{1}{2^n}$ 及 $\frac{1}{n}$ 也都是无穷小。

无穷小量是指无限接近于零的一个变量。不能把很小的数作为无穷小量，如 0.00001 不是无穷小量；逐渐增大的量也可能是无穷小量，如 $n\to\infty$ 时，$(-\frac{1}{n})$ 是逐渐增大的量而且是无穷小量。

二、无穷小量定理

【定理 1】 在自变量的同一变化过程 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)中，$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(\text{或}x\to\infty)}} f(x)=A$ 的充分

必要条件是$f(x)=A+\alpha(x)$,其中$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(或x\to\infty)}}\alpha(x)=0$。

定理1说明$f(x)$以A为极限与$f(x)-A$为无穷小量是一回事,同时也说明极限概念和无穷小量概念是等价的。

【定理2】 有限个无穷小量的代数和仍为无穷小量。

如$x\to0$时,x和$\sin x$都是无穷小量,根据定理2知道,$x\to0$时,$x\pm\sin x$仍为无穷小量。

【定理3】 有界函数与无穷小量乘积仍为无穷小量。

如$x\to\infty$时,$\dfrac{1}{x}$是无穷小量,$\mathrm{arctg}x$是有界函数,根据定理3,当$x\to\infty$时,$x\cdot\mathrm{arctg}x$为无穷小量。

【推论1】 常数与无穷小量的乘积仍为无穷小量。

【推论2】 无穷小量与无穷小量的乘积仍为无穷小量。

如$x\to0$时,x及$\sin x$为无穷小量,根据推论2,当$x\to0$时,$x\cdot\sin x$仍为无穷小量。

三、无穷大量

【定义9】 如果当$x\to x_0$(或$x\to\infty$)时,$|f(x)|$无限增大(即$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(或x\to\infty)}}f(x)=\infty$),则称$f(x)$为$x\to x_0$(或$x\to\infty$)时的无穷大量。

如$x\to0$时,$\dfrac{1}{x}$、$\dfrac{1}{\sin x}$都是无穷大量;$x\to+\infty$时,$\ln x$为无穷大量;$x\to\dfrac{\pi}{2}$时,$\mathrm{tg}x$为无穷大量。

无穷小量与无穷大量的关系是:当$x\to x_0$(或$x\to\infty$时),如果$f(x)$为无穷大量,则$\dfrac{1}{f(x)}$为无穷小量;反之如果$f(x)$为无穷小量,且$f(x)\neq0$,则$1/f(x)$为无穷大量。

言简之,在自变量的同一极限过程$x\to x_0$(或$x\to\infty$)中,无穷小量与无穷大量是倒数关系。

1.2.4 极限的运算

一、极限的四则运算法则

极限的四则运算法则能把较复杂的求极限问题转化为简单的问题来逐个处理。

【定理4】 设$\lim f(x)=A$,$\lim g(x)=B$,则:

(1)$\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$;

(2)$\lim[f(x)\cdot g(x)]=[\lim f(x)]\cdot[\lim g(x)]=A\cdot B$;

(3)$\lim f(x)/g(x)=[\lim f(x)]/[\lim g(x)]=\dfrac{A}{B}$,其中$B\neq0$。

证:(1)因为$\lim f(x)=A$,$\lim g(x)=B$,所以由定理1可得$f(x)=A+\alpha(x)$,$g(x)=B+\beta(x)$,$f(x)\pm g(x)=[A+\alpha(x)]\pm[B+\beta(x)]=[A\pm B]+[\alpha(x)\pm\beta(x)]$由定理2可知$[\alpha(x)\pm\beta(x)]$仍为无穷小,再由定理1得到$\lim[f(x)\pm g(x)]=A\pm B$。

(2)$f(x)\cdot g(x)=[A+\alpha(x)]\cdot[B+\beta(x)]=[A\cdot B]+[B\cdot\alpha(x)+A\cdot\beta(x)+\alpha(x)\cdot\beta(x)]$,

由定理 3 推论 1 可知 $B\cdot\alpha(x)$ 与 $A\cdot\beta(x)$ 都是无穷小，由定理 3 推论 2 可知 $\alpha(x)\cdot\beta(x)$ 是无穷小，由定理 2 可知 $B\cdot\alpha(x)+A\cdot\beta(x)+\alpha(x)\cdot\beta(x)$ 仍为无穷小，再由定理 1 得出 $\lim[f(x)\cdot g(x)]=A\cdot B$。

用类似方法，可证定理 4 中(3)。

定理 4 可推广到有限个函数，同时得出以下推论：

【推论 3】 $\lim[C\cdot f(x)]=C\cdot\lim f(x)=C\cdot A$，其中 C 是常数。

【推论 4】 $\lim[f(x)]^n=[\lim f(x)]^n=A^n$，其中 n 是正整数。

定理 4 及推论 3、推论 4 中 lim 指的是 $\lim\limits_{x\to x_0}$ 或 $\lim\limits_{x\to\infty}$。

例 8 求 $\lim\limits_{x\to 2}(x^3-2x+5)$。

解：
$$\lim_{x\to 2}(x^3-2x+5)=(\lim_{x\to 2}x)^3-2\lim_{x\to 2}x+5=8-2\times 2+5=9$$

例 9 求 $\lim\limits_{x\to 2}(x^3-2x+5)/(x^2-3x-1)$。

解： 因为 $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-3x-1)=-3\neq 0$，所以
$$\lim_{x\to 2}(x^3-2x+5)/(x^2-3x-1)=\frac{\lim\limits_{x\to 2}(x^3-2x+5)}{\lim\limits_{x\to 2}(x^2-3x-1)}=\frac{9}{-3}=-3$$

例 10 求 $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2+1)/(2x^2-x+1)$。

解：
$$\lim_{x\to\infty}(x^2+1)/(2x^2-x+1)=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{2-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}=\frac{1}{2}$$

例 11 求 $\lim\limits_{x\to\infty}(2x^3-x+1)/(x^2+1)$。

解： $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+1}{2x^3-x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}{2-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}=0$，由无穷小量和无穷大量之间的倒数关系，得
$$\lim_{x\to\infty}(2x^3-x+1)/(x^2+1)=\infty$$

例 12 求 $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$。

解：
$$\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}=\lim_{x\to 5}\frac{(\sqrt{x-1}-2)(\sqrt{x-1}+2)}{(x-5)\quad(\sqrt{x-1}+2)}$$
$$=\lim_{x\to 5}\frac{x-5}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)}=\lim_{x\to 5}\frac{1}{(\sqrt{x-1}+2)}=\frac{1}{4}$$

二、两个重要极限

Ⅰ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

为了证明 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，先介绍极限存在准则。

【定理 5】 (两边夹定理)如果函数 $f(x)$、$g(x)$、$h(x)$ 满足下列条件：

(1)自变量 x 在 x_0 点的某个邻域(可以不考虑 x_0 点)内,不等式 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$成立。

(2)$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$。

则函数 $f(x)$的极限存在,且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$。

在证明 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ 之前,先观察在 $x\to 0$ 过程中,$\frac{\sin x}{x}$的变化趋势,见表 1-3。

表 1-3

x(度)	10°	1°	0.1°	…
x(弧度)	0.1745	0.0174533	0.0017453292	…
$\sin x$	0.1736	0.0174524	0.0017453283	…
$\sin x/x$	0.995	0.99995	0.9999995	…

由表 1-3 可以看出,随着 x 值的逐渐减小,$\sin x$ 的值与 x 的值逐渐接近,$\sin x/x$ 与 1 逐渐接近,当 $x\to 0$ 时,$\sin x/x\to 1$。

下面借助几何图形加以证明。

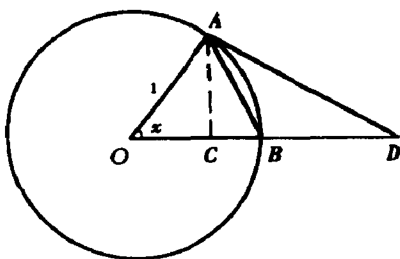


图 1-9

因为 $\sin x/x$ 是偶函数,且对一切不等于零的实数都有意义,所以只需证明 $x\to 0+0$ 的情形。如图 1-9 所示的单位圆。设圆心角$\angle AOB=x$(x 为弧度),点 A 处的切线为 AD,则 $\sin x=AC$,$x=\overset{\frown}{AB}$,$\mathrm{tg}x=AD$,从图 1-9 中直接看出下面的关系:

三角形 AOB 的面积≤扇形 AOB 面积≤三角形 AOD 面积,即 $\frac{1}{2}\times 1\times\sin x<\frac{1}{2}\times 1\times x<\frac{1}{2}\times 1\times \mathrm{tg}x$

整理得 $\cos x<\frac{\sin x}{x}<1$,由图 1-9 中看出线段 $OC=\cos x$,当 $x\to 0$ 时,$OC\to OB=1$,即 $\cos x\to 1$,且 $1\to 1$,由定理 5 得 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$。

例 13 求 $\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{tg}x/x$。

解: $\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{tg}x/x=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}=\left(\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)\cdot\left(\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\right)=1\times 1=1$

例 14 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)}{\frac{1}{2}x^2}$。

解: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)}{\frac{1}{2}x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2(\frac{x}{2})}{\frac{1}{2}x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right]^2=1$

例 15 求 $\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\sin\frac{1}{x}$。

解: 令 $t=\frac{1}{x}$,当 $x\to\infty$时,$t\to 0$,所以 $\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\sin\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$。

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$

当 n 逐渐增大时，数列 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 的变化趋势见表 1-4。

表 1-4

n	1	2	3	4	5	10	10^2	10^3	10^4	10^5	…
$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	2	2.250	2.370	2.441	2.488	2.594	2.705	2.717	2.7181	2.7182	…

从表 1-4 看出，当 n 逐渐增大时，$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 也逐渐增大，当 $n\to\infty$ 时，$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=$ 2.718281828459045…，把这个极限值记为 e，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$。当 n 为任何实数时，结论仍成立，即

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$$

令 $x=\frac{1}{t}$，当 $x\to\infty$ 时，$t\to0$，所以 $\lim\limits_{t\to0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=\mathrm{e}$，即 $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$。

例 16 求 $\lim\limits_{x\to0}(1-kx)^{\frac{1}{x}}$。

解：
$$\lim_{x\to0}(1-kx)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}[1+(-kx)]^{\left(-\frac{1}{kx}\right)\cdot(-k)}$$
$$=\left\{\lim_{x\to0}[1+(-kx)]^{\left(-\frac{1}{kx}\right)}\right\}^{(-k)}=\mathrm{e}^{-k}$$

例 17 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$。

解：
$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{\left(\frac{x-1}{2}\cdot2+1\right)}$$
$$=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{\left(\frac{x-1}{2}\right)}\right]^2\cdot\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)\right]=\mathrm{e}^2$$

1.2.5 无穷小量的比较

无穷小量都是以零为极限，但不同的无穷小量趋于零的速度却不一定相同。如 $x\to0$ 时，x、$2x$、x^2 均为无穷小量，它们趋于零的速度见表 1-5。

表 1-5

x	1	0.5	0.1	0.01	0.001	$\cdots\to0\ (x\to0)$
$2x$	2	1	0.2	0.02	0.002	$\cdots\to0\ (x\to0)$
x^2	0.25	0.25	0.01	0.0001	0.0000001	$\cdots\to0\ (x\to0)$

从表 1-5 中可以看出，$x\to0$ 时，x 比 x^2 趋于零慢一些，x^2 比 x 趋于零快一些，x 与 $2x$ 趋于零快慢相仿。在数学上，常用两个无穷小量比的极限来刻划它们趋于零的快慢程度。

【定义 10】 在自变量同一个变化过程(即 $x\to x_0$ 或 $x\to\infty$)中，设 $\alpha(x)$ 及 $\beta(x)$ 为无穷小，且 $\lim\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}$ 存在。

(1)如果 $\lim\beta(x)/\alpha(x)=0$，则称 $\beta(x)$ 是比 $\alpha(x)$ 较高阶的无穷小，记为 $\beta(x)=o(\alpha(x))$；

(2)如果 $\lim\beta(x)/\alpha(x)=\infty$,则称 $\beta(x)$是比 $\alpha(x)$较低阶的无穷小;

(3)如果 $\lim\beta(x)/\alpha(x)=c$ ($c\neq 0,1$, c 为常数),则称 $\beta(x)$与 $\alpha(x)$是同阶无穷小。特别当 $c=1$ 时,称 $\beta(x)$与 $\alpha(x)$是等价无穷小,记为 $\beta(x)\sim\alpha(x)$。

比如 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{x}=0$,$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x^2}=\infty$,$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{2x}=\frac{1}{2}$,所以当$x\to 0$ 时,x^2 是比 x 较高阶无穷小,x 是比x^2 较低阶无穷小,x 与 $2x$ 是同阶无穷小。再如由 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ 及例 14 中 $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)/\frac{x^2}{2}=1$,可知当 $x\to 0$ 时,$\sin x\sim x$,$1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$。

1.3 函数的连续性

许多客观自然现象如气温、生物的生长,血液的流动等都是随时间连续变化的,这种现象在数学上的反映,就是函数的连续性。

1.3.1 函数的连续性

为介绍函数连续的概念,下面引入增量的定义。

设函数 $y=f(x)$在点 x_0 的某一个邻域内有定义,当自变量由点 x_0 变到另一点 x 时,称 $x-x_0$ 值为自变量的增量,记为 $\Delta x=x-x_0$,相应地 $f(x)-f(x_0)$值称为函数的增量,记为 $\Delta y=f(x)-f(x_0)$。因为 $x=x_0+\Delta x$,故函数增量又可表示为 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$。函数增量的几何意义如图 1-10 所示。

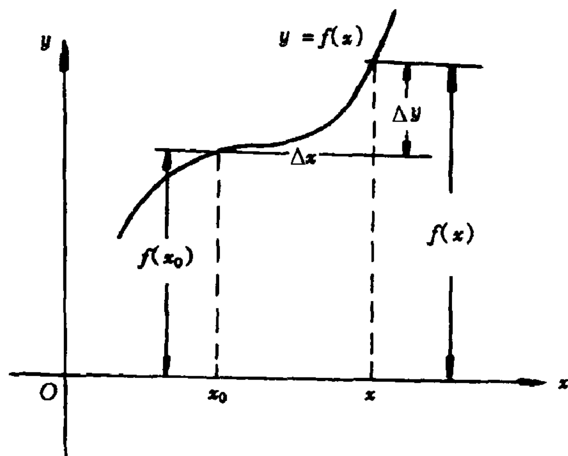


图 1-10

例如设 $f(x)=2(x+1)$,取 $x_0=0$,x、$f(x)$、Δx 及 Δy 的值见表 1-6 所示。

表 1-6

x	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001	$\cdots\to 0$
$f(x)$	2.2	2.02	2.002	2.0002	2.00002	$\cdots\to 2$
Δx	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001	$\cdots\to 0$
Δy	0.2	0.02	0.002	0.0002	0.00002	$\cdots\to 0$

从表 1-6 可以看出，当自变量变化非常小时，函数的变化也非常小，当 $\Delta x \to 0$ 时，$\Delta y \to 0$，这就是连续函数的本质特征。

【定义 11】 设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点的某一个邻域内有定义，在 x_0 点给自变量以增量 $\Delta x = x - x_0$，相应地函数的增量 $\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$，如果 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$，则称函数 $f(x)$ 在 x_0 点连续(continuity)，并称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的连续点。

上式还可以写成 $\lim\limits_{\Delta x \to 0}[f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0$，当 $\Delta x \to 0$ 时，$x \to x_0$，所以上式又可写成 $\lim\limits_{x \to x_0}[f(x) - f(x_0)] = 0$，即 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$。这样函数 $y = f(x)$ 在 x_0 点连续的定义又可表述为如下定义。

【定义 12】 设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点的某一个邻域内有定义，若当 $x \to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限存在且等于 $f(x_0)$，即 $\lim\limits_{x \to x_0}(x) = f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续。

如从表 1-6 可知 $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 2 = f(0)$。

例 18 验证函数 $y = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续。

证：在 $(-\infty, +\infty)$ 上任取一点 x，当 x 有增量 Δx 时，对应的函数增量为：

$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\sin(\frac{\Delta x}{2}) \cdot \cos(x + \frac{\Delta x}{2})$，当 $\Delta x \to 0$ 时，$\sin(\frac{\Delta x}{2})$ 是无穷小量，且 $2\cos(x + \frac{\Delta x}{2})$ 为有界函数，根据定理 3 可知 $2\sin(\frac{\Delta x}{2}) \cdot \cos(x + \frac{\Delta x}{2})$ 仍为无穷小量，从而有 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$，所以函数 $y = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续。

同理可证函数 $\cos x$ 及 $a^x (a > 0, a \neq 1)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上也是连续的。

【定义 13】 设函数 $y = f(x)$ 在 x_0 点的左邻域 $(x_0 - \delta, x_0)$ 内有定义，如果 $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处左连续(continuity from the left)，同理可定义函数 $f(x)$ 在 x_0 点右连续，即 $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$。

如果函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上每一点都连续，则称 $f(x)$ 在 (a, b) 上连续；如果 $f(x)$ 在 $x = a$ 点右连续，而在 $x = b$ 点左连续，则称 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续。

显然，如果函数 $f(x)$ 在 x_0 点连续，则它在 x_0 点既左连续又右连续，反之亦然。因此函数 $f(x)$ 在 x_0 点连续的充分必要条件是它在 x_0 点左连续且右连续，即 $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$。

1.3.2 间断点

如果函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处不连续，则称 x_0 点为 $f(x)$ 的间断点或不连续点(discontinuous point)。

根据定义 12 可知，当函数 $f(x)$ 在点 x_0 有下列三种情况之一时，点 x_0 为函数 $f(x)$ 的间断点：

(1) $f(x)$ 在 x_0 点无意义；

(2) $f(x)$ 在 x_0 点虽然有意义，但 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 不存在；

(3) $f(x)$ 在 x_0 点有意义，且 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 也存在，但 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$。

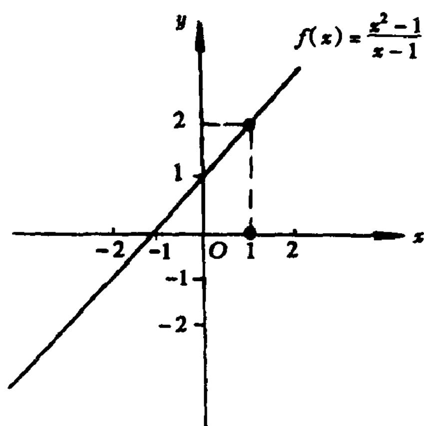


图 1-11

例 19 函数 $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ 在 $x=1$ 点无意义，所以 $x=1$ 是此函数的间断点，见图 1-11。

如例 7 中，函数

$$f(x)=\begin{cases}2x, & 当\ x<0\\ 0, & 当\ x=0\\ x-1, & 当\ x>0\end{cases}$$

$f(x)$ 在 $x=0$ 点有意义，但 $\lim\limits_{x\to0-0}f(x)=\lim\limits_{x\to0-0}(2x)=0$，$\lim\limits_{x\to0+0}f(x)=\lim\limits_{x\to0+0}(x-1)=-1$，所以 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 不存在，因此 $x=0$ 是该函数的间断点。见图 1-12。

例 20 函数 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\neq0\\ 2, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处有意义，但 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}(x+1)=1\neq f(0)$，所以 $x=0$ 是 $f(x)$ 的间断点，见图 1-13。

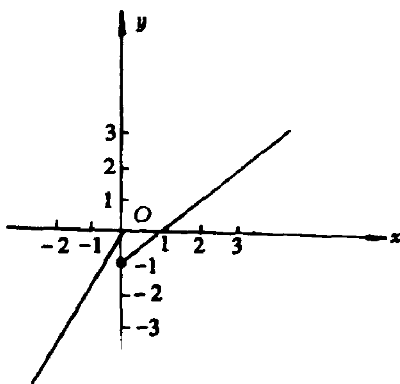


图 1-12

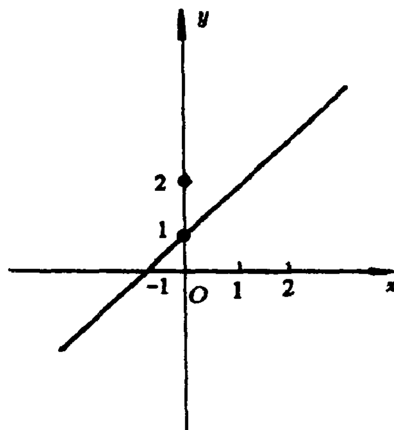


图 1-13

1.3.3 初等函数的连续性

一、基本初等函数的连续性

一切基本初等函数在其定义域内都是连续的，见表 1-1。

二、连续函数的运算

【定理 6】 设函数 $f(x)$、$g(x)$ 在 x_0 点连续，则

(1) $f(x)\pm g(x)$ 在 x_0 点连续；

(2) $f(x)\cdot g(x)$ 在 x_0 点连续；

(3) 当 $g(x_0)\neq0$ 时，$f(x)/g(x)$ 在 x_0 点连续。

三、复合函数的连续性

【定理 7】 设函数 $u=\varphi(x)$，当 $x\to x_0$ 时极限存在且等于 a，即 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$；函数 $y=f(u)$ 在相应点 $u=a$ 连续，即 $\lim\limits_{u\to a}f(u)=f(a)$，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 当 $x\to x_0$ 时的极限也存在且等于 $f(a)$，即 $\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=f(a)$。

定理 7 中 $\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=f(a)=f[\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)]$，说明极限符号与对应法则 f 可以互换。

【推论 5】 如果函数 $u=\varphi(x)$ 当 $x\to x_0$ 时连续，即 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\varphi(x_0)$，函数 $y=f(u)$ 在相应点 $u=\varphi(x_0)$ 连续，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 当 $x\to x_0$ 时连续，即 $\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=f[\varphi(x_0)]$。

事实上只要在定理 7 中令 $a=\varphi(x_0)$，即可得到推论 5。

例 21 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\cos(1+x)^{\frac{1}{x}}$。

解： 函数 $\cos(1+x)^{\frac{1}{x}}$ 可看作由 $y=\cos u$ 及 $u=(1+x)^{\frac{1}{x}}$ 复合而成，因为 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$，而 $y=\cos u$ 在相应点 $u=\mathrm{e}$ 连续，根据定理 7 有 $\lim\limits_{x\to 0}\cos(1+x)^{\frac{1}{x}}=\cos[\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}]=\cos \mathrm{e}$。

例 22 讨论函数 $\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ 的连续性。

解： 函数 $\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ 可看作由 $y=\mathrm{e}^u$，$u=\dfrac{1}{x}$ 复合而成，因为 $u=\dfrac{1}{x}$ 在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上连续，$y=\mathrm{e}^u$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，根据推论 5 得 $\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ 在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上连续。

四、初等函数的连续性

初等函数由基本初等函数（包括常数）经过有限次的四则运算和复合运算而构成，而基本初等函数和复合函数在其定义域内是连续的，因此一切初等函数在其定义区间内是连续的，所谓定义区间是指包含在定义域内的区间。所以求一个初等函数的连续区间问题就转化为求这个函数的定义区间，初等函数在定义区间内任意一点的极限值就是该点的函数值。

例 23 求函数 $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{x^2}\cdot\arcsin x}{1-x^2}$ 的连续区间，并求当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 的极限。

解： 因为 $f(x)$ 是初等函数，所以 $f(x)$ 的连续区间就是它的定义区间，$f(x)$ 在 $(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$ 上有定义，故 $f(x)$ 的连续区间为 $(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$。又因为 $x=0$ 为 $f(x)$ 连续区间内一点，所以 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)=0$，即 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{x^2}\cdot\arcsin x}{1-x^2}=0$。

五、反函数的连续性

【定理 8】 如果函数 $y=f(x)$ 在区间 I_x 上单值，单调增加（或单调减少）且连续，则其反函数 $x=f^{-1}(y)$ 在对应区间 $I_y=\{y\mid y=f(x),x\in I_x\}$ 上也单值、单调增加（或单调

减少)且连续。

如 $y=\sin x$ 在区间 $I_x=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上单值,单调增加且连续,其反函数 $x=\arcsin y$ 在对应区间 $I_y=[-1,1]$ 上也单值,单调增加且连续,又如 $y=\cos x$ 在 $I_x=[0,\pi]$ 上单值,单调减少且连续,其反函数在 $I_y=[-1,1]$ 上也单值、单调减少且连续。见表 1-1。

1.3.4 闭区间上连续函数的性质

闭区间上连续函数的性质在今后学习中很有用,它们的几何意义非常明显,我们只从几何直观上加以解释,不做严格证明。

【定理 9】 (最大值最小值定理) 闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数 $f(x)$ 在该区间上至少取得它的最大值 M 和最小值 m 各一次。见图 1-14。

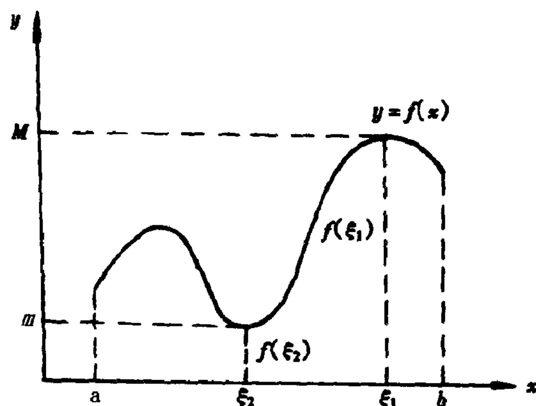


图 1-14

【推论 6】 闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数 $f(x)$ 一定有界。

因为 $m\leqslant f(x)\leqslant M$,取 $k=\max\{|m|,|M|\}>0$,所以当 $x\in[a,b]$ 时,有 $|f(x)|\leqslant k$ 成立。

【定理 10】 (介值定理) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,且 $A=f(a)\neq f(b)=B$,C 为 A 与 B 之间的任意一个值,则在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ,使 $f(\xi)=C$,见图 1-15。

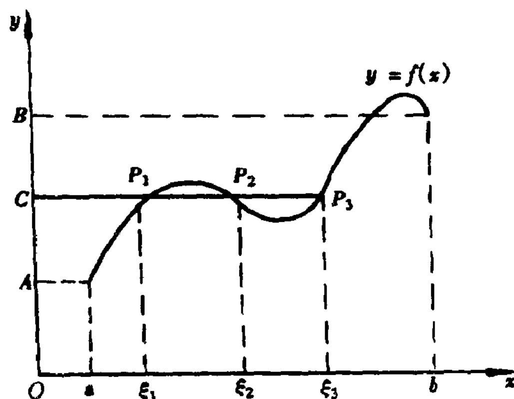


图 1 15

从图 1-15 看出，连续曲线 $y=f(x)$ 与水平直线 $y=C$ 至少相交于一点。

【推论 7】 $y=f(x)$在$[a,b]$区间上连续，且 $f(a)\cdot f(b)<0$ 时，则在开区间(a,b)内至少存在一点 ξ，使 $f(\xi)=0$，见图 1-16 所示。

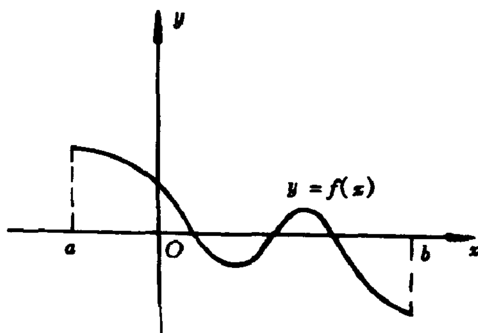


图 1-16

从图 1-16 看出连续曲线 $f(x)$与 x 轴至少相交于一点。

例 24 证明三次方程 $x^3+3x^2=1$ 至少有一个实根介于 0 和 1 之间。

证： 令 $f(x)=x^3+3x^2-1$，它为初等函数，在闭区间$[0,1]$上连续，且 $f(0)=-1<0$，$f(1)=3>0$，由定理 10 推论 7 可知，在开区间$(0,1)$内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=\xi^3+3\xi^2-1=0$，说明方程 $x^3+3x^2-1=0$ 在$(0,1)$内至少有一个实根 ξ。

小　　结

本章主要讨论了函数的概念及其特性；基本初等函数，复合函数及初等函数的构成；函数的极限及其连续性。

函数反映了客观世界中变量之间的对应关系，初等函数隐含了复杂的函数关系，函数的复合与分解运算将复杂的函数关系剖析为简单函数。

极限概念及其运算是微积分学的重要工具，极限过程反映了自变量向某一目标趋近的过程中因变量的变化趋势。无穷小量是以零为极限的变量，任何有极限的变量都可以表示为其极限值与一个无穷小量之和，无穷大量是一种无极限的变量，二者之间是互为倒数关系。从而将这两个本质不同的变量联系起来。利用两个重要极限可以求出两类复杂函数的极限。

利用极限工具研究函数的连续性，最后推出基本初等函数在其定义域内连续及一切初等函数在其定义区间上是连续的，由于连续函数及分段连续函数大量存在，因此研究了闭区间上连续函数的性质，为我们研究其它函数奠定了基础。

一个函数 $f(x)$在某点 x_0 处的函数值 $f(x_0)$，极限值 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$及 $f(x)$在 x_0 点连续这三个概念不同：$f(x_0)$表示 $f(x)$在 x_0 点有定义，而函数 $f(x)$在 x_0 点有无极限却与 $f(x)$在 x_0 点有无定义无关，函数 $f(x)$在 x_0 点连续不仅要求 $f(x)$在 x_0 点有定义，而且极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$必须存在且等于 $f(x_0)$，即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$。

习　　题

一、判断题

1. 设 $f(x)$为定义在$[-a,a]$上的任意函数,则 $f(x)$与 $f(-x)$必为偶函数。

2. $y=2\ln^{x}$ 与 $y=\ln^{x^2}$是同一函数。

3. 分段函数都不是初等函数。

4. 发散数列必然无界。

5. 有界数列必然收敛。

6. 若 $f(x)$在 x_0 处连续,$g(x)$在 x_0 处间断,则 $f(x)+g(x)$在 x_0 点必间断。

7. 如果 $f(u)$在 $u=a$ 处连续,$u=\varphi(x)$在 x_0 处连续,且 $\varphi(x_0)=a$,则 $\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=f[\varphi(x_0)]$。

二、选择题

1. $f(x)=x^2,\varphi(x)=2^x$,则 $f[\varphi(x)]=(\quad)$。

(A)2^{x^2};　(B)x^{2^x};　(C)x^{2x};　(D)2^{2x}。

2. 函数 $y=f(x)$与其反函数 $y=f^{-1}(x)$的图形对称于直线(　　)。

(A)$y=0$;　(B)$x=0$;　(C)$y=x$;　(D)$y=-x$。

3. 当 $x\to0$ 时,下面各式中为无穷小量的是(　　)。

(A)$x\sin\dfrac{1}{x}$;　(B)$e^{\frac{1}{x}}$;　(C)$\lg x$;　(D)$\dfrac{1}{x}\cdot\sin x$。

4. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\cdot\sin\dfrac{1}{x}}{\cos x}=(\quad)$。

(A)不存在;　(B)0;　(C)1;　(D)∞。

5. $f(x)=\begin{cases}3x-1, & x<1\\ 1, & x=1,\\ 3-x, & x>1\end{cases}$　$x=1$ 点是(　　)。

(A)连续点;　(B)间断点;　(C)不能确定。

6. $f(x)=\ln(9-x^2)$的连续区间是(　　)。

(A)$(-\infty,3)$;　(B)$(3,+\infty)$;　(C)$[-3,3]$;　(D)$(-3,3)$

7. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x-1, & 0\leqslant x<1\\ -10, & x=1\\ x+1, & 1<x\leqslant2\end{cases}$,则 $f(x)$在闭区间$[0,2]$上(　　)。

(A)有最大值也有最小值;

(B)无最大值也无最小值;

(C)只有最小值,没有最大值;

(D)只有最大值,没有最小值。

8. 方程 $x^4-x-1=0$ 至少有一个根的区间是(　　)。

(A)$(0,2)$;　(B)$(\frac{1}{2},1)$;　(C)$(2,3)$;　(D)$(1,2)$。

三、填空题

1. 设 $f(x)$的定义域是$[0,2]$,则 $f(x-1)$的定义域是(　　)。

2. $y=\text{arctg}(x^3)$的图形关于(　　)对称。

3. 函数 $y=\cos\dfrac{x}{3}$的周期是(　　)。

4. 函数 $y=x^2(x<0)$的反函数是(　　)。

5. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}=$(　　)。

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\text{arctg}x}{x}=$(　　)。

7. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{\sin(x-2)}=$(　　)。

8. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+ax+b}{1-x}=5$,则 $a=$(　),$b=$(　)。

9. $\lim\limits_{x\to0}(1-\sin x)^{\frac{1}{x}}=$(　　)。

10. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\text{tg}2x}{\sin5x}=$(　　)。

11. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x}=$(　　)。

12. $f(x)=\begin{cases}e^x, x<0\\ a+x, x\geqslant0\end{cases}$,如果 $f(x)$在 $x=0$ 点连续,则 $a=$(　　)。

四、解答题

1. 求下列函数的定域:

(1)$y=\sqrt{x-\sqrt{x}}$;

(2)$y=\left(\arcsin\dfrac{x-1}{5}\right)+\sqrt{25-x^2}$;

(3)用铁皮做一个容积为 V 的圆柱形罐头筒,试将它的全面积表示成底半径的函数,求它的定义域;

(4)设细菌原有数为 N_0,每天的繁殖率为 r,问经过 x 天后数为多少? 建立函数关系,并求其定义域。

2. 若 $f(x)=\dfrac{|x-2|}{x+1}$,求 $f(-2)$及 $f(a+b)$。

3. 给出函数 $y=e^{\sin^3(\frac{1}{x})}$的分解式。

4. 若 $f(x)=\ln x$,证明 $f(x)+f(x+1)=f[x(x+1)]$。

5. 已知 $f(x+1)=\begin{cases}x^2, & 0\leqslant x\leqslant1\\ 2x, & 1<x\leqslant2\end{cases}$,求 $f(x)$。

6. 求下列函数的极限。

(1)$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{3^n}}$

(2)$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{1\cdot2}+\dfrac{1}{2\cdot3}+\cdots+\dfrac{1}{n\cdot(n+1)}\right]$

(3) $\lim\limits_{x\to1}\left[\dfrac{3}{1-x^3}+\dfrac{1}{x-1}\right]$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$

(5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$

(6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin x\cdot \mathrm{arctg} x}{2x^2}$

(7) $\lim\limits_{x\to0}(1+3\mathrm{tg}^2x)^{\mathrm{ctg}^2x}$

(8) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{2x+3}{2x+1}\right]^{2x}$

(9) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{1-\cos x}$

(10) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{e^x-e^a}{x-a}$

7. 在边长为 a 的等边三角形里，连接各边中点做一个内接三角形，如此继续做下去，求所有这些三角形面积的和。

8. 指出下列各题的无穷小量和无穷大量。

(1) $\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$ $(x\to0)$

(2) $\dfrac{\mathrm{arctg} x}{1+x^2}$ $(x\to\infty)$

(3) $e^x\cdot\sin x$ $(x\to\infty)$

(4) $\dfrac{1}{\sin x}\cdot(x+1)$ $(x\to0)$

9. 比较下列无穷小量的阶。

当 $x\to1$ 时，无穷小量 $1-x$ 与 $1-x^3$、$\dfrac{1}{2(1-x^2)}$之比。

10. 函数 x^2、$\dfrac{x^2-1}{x^3}$、e^{-x}何时为无穷小量？何时为无穷大量？

11. 设函数 $y=2x^3+1$，求 x 从点 1 变到点 3 时函数的增量。

12. 适当选取 a、b 的值，使 $f(x)$在 $x=0$ 处连续，其中

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\cdot\sin x, & x<0\\ a+2, & x=0\\ x\cdot\sin\dfrac{1}{x}+b, & x>0\end{cases}$$

13. 试确定 k 的值，使 $f(x)$在 $x=1$ 处连续，其中

$$f(x)=\begin{cases}x^{\frac{2}{x-1}}, & x\neq1\\ e^k, & x=1\end{cases}$$

14. 设 $f(x)=e^x-2$，求证在区间(0,2)内至少有一点 x_0，使 $e^{x_0}-2=0$。

15. 试证方程 $x=a\sin x+b$(其中 $a>0,b>0$)至少有一个正根，并且它不超过 $a+b$。

16. 雌性小鼠的生长曲线为 $w(t)=\dfrac{26}{1+30e^{-\frac{2}{3}}}$,其中 $w(t)$ 表示体重,以克(g)为单位,t 表示出生后的时间,以周为单位,求(1)小鼠出生时的体重;(2)可能达到最大的体重;(3)什么时候体重是最大体重的一半?

17. 设函数 $f(x)$、$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,且 $f(a)>g(a)$,$f(b)<g(b)$,证明在 (a,b) 内曲线 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 至少有一个交点。

(王桂杰　马建忠)

第二章　一元函数微分学

从本章开始，我们将进入高等数学的重要领域——微分学。本章将主要介绍导数和微分这两个微分学的基本概念，及它们的基础知识。导数与微分是近代数学的基石，例如计算机对各种函数值的计算，就必须以某一点的函数值以及在该点的各阶导数值为基础，并借助于级数求和的方法才能进行。

导数和微分来源于求解力学中的瞬时速度和几何中的切线斜率，随着科学的迅猛发展，导数与微分在物理、药学、生理学和经济学等各个应用科学领域都有着广泛的应用。

2.1　导数的概念

2.1.1　引例

一、力学中的瞬时速度问题

人们在考察物体运动时认为：物体在运动过程中的瞬时速度，是平均速度当时间无限缩小时的极限。我们以自由落体运动 $s(t)=\frac{1}{2}gt^2$ 为例，求它在 $t=t_0$ 时的瞬时速度 $v(t_0)$。

设物体在 t_0 时的位移为 $s(t_0)$，给 t_0 以增量 Δt，相应地，$s(t_0)$ 有增量 $\Delta s=s(t_0+\Delta t)-s(t_0)$，则物体在 Δt 内的平均速度为

$$\bar{v}=\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}=\frac{\frac{1}{2}g(t_0+\Delta t)^2-\frac{1}{2}gt_0^2}{\Delta t}=\frac{1}{2}g(2t_0+\Delta t)$$

上式即为 $v=\frac{\Delta s}{\Delta t}$，令 $\Delta t\to 0$，则可得物体在 t_0 时刻的瞬时速度 $v(t_0)$，即

$$v(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{2}g(2t_0+\Delta t)=gt_0$$

如果我们把上述改变量的比的极限称为导数，那么速度便可看成路程对时间的导数。

二、几何中的切线斜率问题

如图 2-1 所示，我们以抛物线 $y=x^2$ 为例求抛物线上过点 (x_0,y_0) 的切线斜率。这里 $y_0=x_0^2$。给 x_0 以增量 Δx，并令 $x=\Delta x-x_0$，相应地 y_0 有增量 $\Delta y=(x_0+\Delta x)^2-x_0^2=x^2-x_0^2$，则过 (x_0,y_0) 与 $(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$ 这两点的曲线的割线斜率为

$$\mathrm{tg}\varphi=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{x^2-x_0^2}{x-x_0}=x+x_0$$

其中，φ 是割线的倾斜角。令 $\Delta x\to 0$，即可得出抛物线 $y=x^2$ 过 (x_0,y_0) 的切线斜率

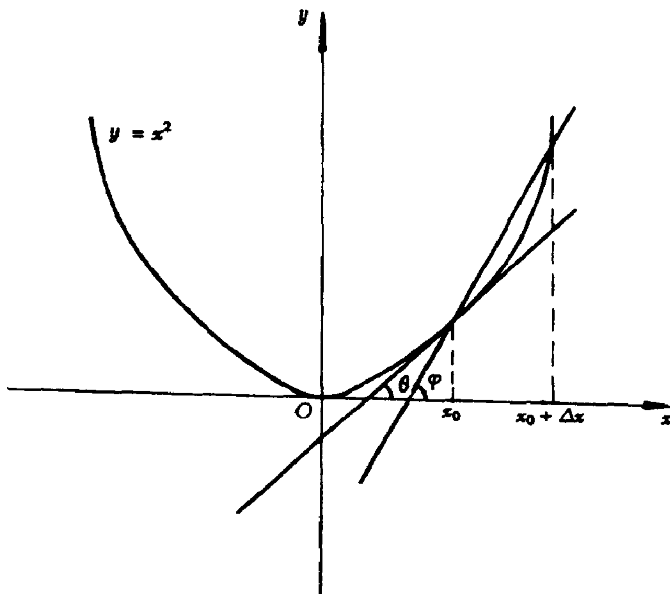


图 2-1

$\mathrm{tg}\theta=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(x_0+\Delta x)^2-x_0^2}{\Delta x}=2x_0$，这里，$\theta$ 是过(x_0,y_0)的切线之倾斜角。

仿照以上两例，我们可以抽象出 $y=f(x)$在 $x=x_0$ 时，y 对 x 的变化率，从而引出导数的概念。

2.1.2 导数的定义

【定义 1】 设函数 $y=f(x)$在 x_0 及其某个邻域内有定义，当自变量 x 在 x_0 处有增量 Δx($x_0+\Delta x$ 仍属该邻域)时，相应地，函数 y 有增量为 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，如果极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\tag{2-1}$$

存在，则称该极限值为函数 $y=f(x)$在 x_0 处的导数(derivative)，记为 $y'\big|_{x=x_0}$，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=x_0}$ 或 $f'(x_0)$，$\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=x_0}$，并称函数 $f(x)$在 x_0 处可导；否则，就说 $f(x)$在 x_0 处不可导或说 $f(x)$在 x_0 处的导数不存在。

如果函数 $f(x)$在某个开区间(a,b)内处处可导，则称它在区间(a,b)内可导；此时，对应于(a,b)内的每一点 x，$f(x)$都有一个确定的导数值，于是 x 和其对应点的导数值之间便构成了一个新的函数，称此函数为 $f(x)$的导函数，简称导数，记为 y'、$f'(x)$或 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$、$\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$，前两种写法归属拉格朗日表示，而后两种则属莱布尼茨表示。对于区间(a,b)内的每一点 x，有

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\tag{2-2}$$

而 $y=f(x)$在 x_0 处的导数即为 $f'(x)$在 x_0 处的函数值，即$f'(x_0)=f'(x)\big|_{x=x_0}$。

根据导数定义,求函数 $y=f(x)$在 x 处的导数$f'(x)$,可按以下三步进行:

1° 求增量 $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$;

2° 算比值 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$;

3° 取极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$。

例 1 对前面讨论的函数 $y=x^2$,求 y 在 $x=1$ 及 $x=2$ 处的导数。

解:

$$\Delta y=(x+\Delta x)^2-x^2=(2x+\Delta x)\Delta x$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(2x+\Delta x)\Delta x}{\Delta x}=2x+\Delta x$$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x$$

所以,$f'(1)=(2x)|_{x=1}=2, f'(2)=(2x)|_{x=2}=4$。

例 2 求函数 $y=kx+b(k\neq 0,k,b$ 为常数)的导数。

解:

$$\Delta y=[k(x+\Delta x)+b]-(kx+b)=k\Delta x$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{k\Delta x}{\Delta x}=k$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}k=k$$

所以,$y'=k$。

以上求导三步骤在熟练掌握之后,可综合成一步进行。

例 3 求 $y=\sqrt[3]{x}$的导数。

解:

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+\Delta x}-\sqrt[3]{x}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\sqrt[3]{x+\Delta x}-\sqrt[3]{x})(\sqrt[3]{(x+\Delta x)^2}+\sqrt[3]{(x+\Delta x)x}+\sqrt[3]{x^2})}{\Delta x(\sqrt[3]{(x+\Delta x)^2}+\sqrt[3]{(x+\Delta x)x}+\sqrt[3]{x^2})}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)-x}{\Delta x(\sqrt[3]{(x+\Delta x)^2}+\sqrt[3]{(x+\Delta x)x}+\sqrt[3]{x^2})}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{(x+\Delta x)^2}+\sqrt[3]{(x+\Delta x)x}+\sqrt[3]{x^2}}=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$

2.1.3 导数的几何意义

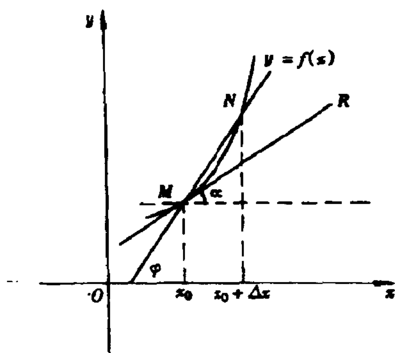


图 2-2

对于曲线方程 $y=f(x)$来说,很明显,过曲线上的点 $M(x_0,y_0)$及 $N(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$的割线斜率为$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$,即 $\operatorname{tg}\varphi=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$。当 $\Delta x\to 0$,亦即 N 无限靠近 M 时,如果 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$存在,那么割线就将趋向于曲线上过点 $M(x_0,y_0)$的曲线的切线,即有 $\Delta x\to 0$ 时,$\varphi\to\alpha$,于是 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\varphi\to\alpha}\operatorname{tg}\varphi=\operatorname{tg}\alpha$。导数 $f'(x_0)$的几何意义就是曲线上过点(x_0,y_0)切线的斜率。

值得注意的是,如果 $y=f(x)$在(x,y)处的切线与 x 轴垂直,则 $f'(x)$为无穷大;如果在(x,y)处无切线,则 $f(x)$在该点也不可导。实质上,导数不仅刻画函数在一点的变化快慢程度,而且也刻画曲线在某一点倾斜程度。

例 4 求过点$(0,-1)$且与 $y=x^2$ 相切的直线方程。

解: 由例 1 知 $y'=2x$,设所求直线与 $y=x^2$ 交于(x_0,y_0),则该直线的斜率为 $2x_0$,又知 $y_0=x_0^2$,从而有 $2x_0=\dfrac{x_0^2-(-1)}{x_0-0}$,解出上式,得 $x_{01}=-1$,$x_{02}=1$,从而知过点$(0,-1)$可作两条直线与 $y=x^2$ 相切,其斜率分别为 $k_1=-2$ 和 $k_2=2$,二直线方程分别为 $y+1=-2x$ 和$y+1=2x$。

2.1.4 函数的连续性与可导性的关系

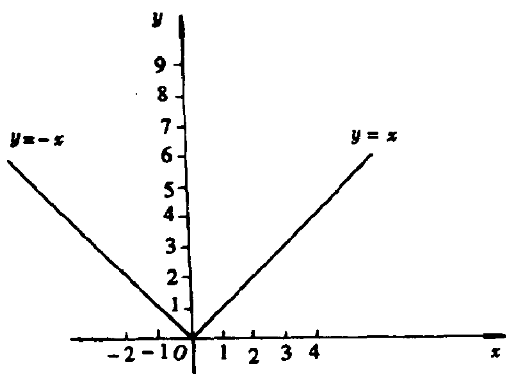


图 2-3

我们知道,函数在一点的导数存在,仅仅强调在该点曲线上的切线存在,而函数在一点连续就未谈切线问题。由此,我们可以推测一个结论:连续不一定可导。数学上常用 1 个反例来说明这类结论的正确性。一个最简单的例子就是 $y=|x|$,它在 $x=0$ 处连续,但在该点却不可导。如图 2-3,在 $x=0$ 处,左右极限分别为 $\lim\limits_{\Delta x\to 0+0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0+0}\dfrac{\Delta x}{\Delta x}=1$ 及 $\lim\limits_{\Delta x\to 0-0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0-0}\dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0-0}\dfrac{-\Delta x}{\Delta x}=-1$,左右极限不相等,所以 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$不存在,因而 $y=|x|$在 $x=0$ 处不可导,它的几何意义是此折线在点$(0,0)$处不存在切线。因此,函数虽在某一点连续,但在该点却不一定可导。然而反过来,我们可以断言:函数在某点可导,则一定在该点连续。这可用以下文字简单证明。

设 $y=f(x)$在 x_0 处可导,则 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$,由此推知

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta x\neq 0}}\Delta y=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta x\neq 0}}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\Delta x\right)=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta x\neq 0}}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)\cdot\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta x\neq 0}}\Delta x=f'(x_0)\cdot 0=0$$

从而知道,如果函数在某点可导,则必在该点连续;但反之则不一定成立。

2.2 导数的运算

根据上一节介绍的导数定义,容易求出一些简单函数的导数。但对于那些较复杂的函数,利用导数定义求导就可能困难重重,这就需要把定义求导法和函数的各种特性适当结合,进而形成一些基本公式和基本运算法则,而不必再用导数定义求之。

2.2.1 几个基本初等函数的导数

一、常数的导数

设 $y=f(x)=c$(c 为常数),求 y'。

解　$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{c-c}{\Delta x}=0$ 即$(c)'=0$　(2-3)

从几何图形上看，$f(x)=c$ 是一条与 x 轴平行的直线，其切线就是直线本身，因而其斜率为 0。

二、幂函数的导数

设 $y=f(x)=x^n$（n 为自然数），求 y'。

解：

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^n-x^n}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{n\cdot x^{n-1}\cdot\Delta x+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot x^{n-2}\cdot(\Delta x)^2+\cdots+(\Delta x)^n}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left[n\cdot x^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\cdot\Delta x+\cdots+(\Delta x)^{n-1}\right]=n\cdot x^{n-1}$$

因而 $(x^n)'=n\cdot x^{n-1}$　(2-4)

在本章例 19 中将说明，对于 n 为任意实数的情形，式(2-4)仍成立。从式(2-4)可看出，幂函数 $y=x^n$（$n\geqslant 2$ 时）的增加速度将随 x 值的增加而逐渐加快（$x\geqslant 1$ 时）。以后读者可用导数结果自行考虑函数变化的快慢问题。

三、正弦函数与余弦函数的导数

设 $y=\sin x$，$z=\cos x$，求 y'，z'。

解：

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=\cos x$$

即　$(\sin x)'=\cos x$　(2-5)

同理可得　$(\cos x)'=-\sin x$　(2-6)

四、对数函数的导数

设 $y=\log_a x$（$a>0,a\neq 1,x>0$），求 y'。

解：

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log a(x+\Delta x)-\log_a x}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{\Delta x}\cdot\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)\right]$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}=\frac{1}{x}\log_a e=\frac{1}{x\ln a}\qquad(2\text{-}7)$$

2.2.2 导数的四则运算法则

【法则 1】 设 $u=u(x), v=v(x)$在 x 处可导,则函数 $y=u\pm v$ 在 x 处也可导,且

$$(u\pm v)'=u'\pm v' \tag{2-8}$$

【法则 2】 设 $u=u(x), v=v(x)$在点 x 处可导,则函数 $y=u\cdot v$ 在点 x 处也可导,且

$$(u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v' \tag{2-9}$$

【推论 1】

$$(c\cdot u)'=c\cdot u' \qquad (c\text{ 为常数}) \tag{2-10}$$

【推论 2】 设 u, v, w 都是 x 的函数,且都在 x 点可导,则 $y=u\cdot v\cdot w$ 也在 x 处可导,且

$$(u\cdot v\cdot w)'=u'\cdot v\cdot w+u\cdot v'\cdot w+u\cdot v\cdot w' \tag{2-11}$$

【法则 3】 设 $u=u(x), v=v(x)$在点 x 处可导,且 $v(x)\neq 0$,则 $y=\frac{u}{v}$ 在点 x 处也可导,且

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2} \tag{2-12}$$

以上三个法则都可通过导数定义给出证明,我们仅就法则 3 做出证明。

证: 在点 x 处,对应于改变量 Δx,有

$$\begin{aligned}\Delta y&=\frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)}-\frac{u(x)}{v(x)}=\frac{u(x+\Delta x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)\cdot v(x)}\\&=\frac{u(x+\Delta x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)\cdot v(x)}\\&=\frac{v(x)\cdot\Delta u-u(x)\cdot\Delta v}{v(x+\Delta x)\cdot v(x)}\end{aligned}$$

由于 $v(x)$在 x 处可导,从而在该点连续,所以有 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}v(x+\Delta x)=v(x)$,因而

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{v(x+\Delta x)\cdot v(x)}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\left[v(x)\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}-u(x)\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}\right]\\&=\frac{v(x)\cdot u'(x)-u(x)\cdot v'(x)}{v^2(x)}\end{aligned}$$

即 $y'=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$。 证毕。

例 5 已知 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$,求 y'。

解:
$$\begin{aligned}y'&=(ax^2+bx+c)'=(ax^2)'+(bx)'+(c)'\\&=a(x^2)'+b(x)'+(c)'=2ax+b\end{aligned}$$

例 6 已知 $y=x\sin x+x^2\ln x$,求 y'。

解:
$$\begin{aligned}y'&=(x\sin x+x^2\ln x)'=(x\sin x)'+(x^2\ln x)'\\&=(x)'\cdot\sin x+x\cdot(\sin x)'+(x^2)'\cdot\ln x+x^2(\ln x)'\\&=\sin x+x\cos x+2x\cdot\ln x+x^2\cdot\frac{1}{x}=\sin x+x\cdot\cos x+2x\ln x+x\end{aligned}$$

例 7 已知 $y=\frac{1}{x}$,$(x\neq 0)$,求 y'。

解:
$$y'=\left(\frac{1}{x}\right)'=\frac{(1)'\cdot x-1\cdot(x)'}{x^2}=-\frac{1}{x^2}$$

例 8　已知 $y=\sec x(x\neq k\pi+\frac{\pi}{2})$，$z=\csc x(x\neq k\pi)$，求 y'，z'。

解： $y'=(\sec x)'=(\frac{1}{\cos x})'=\frac{(1)'\cdot\cos x-1\cdot(\cos x)'}{\cos^2 x}=\mathrm{tg}x\cdot\sec x$，即

$$(\sec x)'=\mathrm{tg}x\cdot\sec x \tag{2-13}$$

同理

$$(\csc x)'=-\cot x\cdot\csc x \tag{2-14}$$

例 9　已知 $y=\mathrm{tg}x$，$\omega=\cot x$，求 y'，ω'。

解： $y'=(\mathrm{tg}x)'=(\frac{\sin x}{\cos x})'=\frac{(\sin x)'\cdot\cos x-\sin x\cdot(\cos x)'}{\cos^2 x}$

$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\sec^2 x$$

即

$$(\mathrm{tg}x)'=\sec^2 x \tag{2-15}$$

同理

$$(\cot x)'=-\csc^2 x \tag{2-16}$$

2.2.3　复合函数和隐函数求导法

一、复合函数求导法

【定理 1】　设函数 $u=\varphi(x)$ 在 x 处有导数 $\frac{du}{dx}=\varphi'(x)$，函数 $y=f(u)$ 在 x 的对应点 $u=\varphi(x)$ 处可导，$\frac{dy}{du}=f'(u)$，则复合函数(compound function) $y=f[\varphi(x)]$ 在点 x 处也可导，且

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}\quad 或\quad f'[\varphi(x)]=f'(u)\cdot\varphi'(x) \tag{2-17}$$

证： 因为 $y=f(u)$ 在 $u=\varphi(x)$ 处可导，所以，$\lim\limits_{\substack{\Delta u\to 0\\ \Delta u\neq 0}}\frac{\Delta y}{\Delta u}=f'(u)$，即 $\lim\limits_{\substack{\Delta u\to 0\\ \Delta u\neq 0}}\left[\frac{\Delta y}{\Delta u}-f'(u)\right]=0$，从而，无论 Δu 是否等于 0，总有 $\Delta y=f'(u)\Delta u+\alpha\Delta u$ 成立，其中

$$\alpha=\begin{cases}与\ \Delta u\ 同阶无穷小, & \Delta u\to 0\ 且\ \Delta u\neq 0\ 时\\ 0 & \Delta u=0\ 时\end{cases}$$

由此，

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[f'(u)\frac{\Delta u}{\Delta x}+\alpha\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}\right]$$

$$=f'(u)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\alpha\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=f'(u)\cdot u'(x)$$ 证毕。

上述复合函数求导法则可推广到多层复合函数的情形，请读者在具体运用中细心体会，例如 $v=\varphi(x)$ 在 x 处可导，$u=g(v)$ 在 x 的对应点 $v=\varphi(x)$ 处可导，而 $y=f(u)$ 在 v 的对应点 $u=g(v)$ 处也可导，则 $y=f\{g[\varphi(x)]\}$ 在 x 处可导，且

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx} \tag{2-18}$$

例 10　已知 $y=(1+x^2)^3$，求 $\frac{dy}{dx}$。

解： 令 $y=u^3$，$u=1+x^2$，$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$

$$=3u^2\cdot(1+x^2)'=3(1+x^2)^2\cdot 2x=6x(1+x^2)^2$$

例 11 已知 $y=\sin 2x$,求$\frac{dy}{dx}$。

解: 设 $y=\sin u$, $u=2x$,则

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\cos x\cdot 2=2\cos x$$

在对复合函数求导的过程中,如果设了中间变量,则在最后结果中应代回直接变量,当对上述分解求导熟练之后,可省掉设中间变量这一步而对复合函数直接求导。

例 12 已知 $y=\frac{1}{1+\mathrm{tg}2x}$,求$\frac{dy}{dx}$。

解:
$$\frac{dy}{dx}=\frac{(1)'\cdot\mathrm{tg}2x-1\cdot(\mathrm{tg}2x)'}{(1+\mathrm{tg}2x)^2}=\frac{-\sec^2(2x)\cdot(2x)'}{(1+\mathrm{tg}2x)^2}$$
$$=-\frac{2\sec^2 2x}{(1+\mathrm{tg}2x)^2}$$

例 13 已知 $y=(\cot x)^2$,求$\frac{dy}{dx}$。

解: $\frac{dy}{dx}=2\cot x\cdot(\cot x)'=-2\cot x\cdot\csc^2 x$。

例 14 已知 $y=\ln\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$,求 y'。

解:
$$y'=\frac{1}{\frac{1-x^2}{1+x^2}}\cdot\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)'=\frac{1+x^2}{1-x^2}\cdot\frac{-2x\cdot(1+x^2)-2x\cdot(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$$
$$=-\frac{4x}{(1-x^2)(1+x^2)}$$

二、隐函数求导法

前面我们涉及的函数都是 $y=f(x)$的形式,亦即 y 可表达成关于 x 的显函数(explicit function)的形式,而有时 y 与 x 的函数关系隐含在 $F(x,y)=0$ 中,这种形式的函数称为隐函数(implicit function)。例如 $x^2+y^2=1$, $xe^y+e^x=0$,等等。如果我们把 y 看成中间变量,则可运用复合函数求导法则求出 y 对 x 的导数。

例 15 y 是由 $\sin y+\cos x=1$ 所确定的关于 x 的函数,求 y'。

解: 为便于理解,此例中我们设 $y=f(x)$,上式变化为 $\sin[f(x)]+\cos x=1$,在等式两边同时关于 x 求导,则由于 $\sin[f(x)]$是一个复合函数,中间变量为 $y=f(x)$,因而 $\{\sin[f(x)]\}'=\cos[f(x)]\cdot f'(x)$,从而有 $f'(x)\cdot\cos[f(x)]-\sin x=0$,即 $y'\cdot\cos y-\sin x=0$,最后得 $y'=\frac{\sin x}{\cos y}$。

注意:在涉及到对隐函数求导时,要时刻牢记 y 是 x 的函数,因而在对 x 求导时,要把 y 看成中间变量;此外,导数结果表达式中可以同时含有变量 x 和 y,因为 y 本来就不一定能表达成关于 x 的显函数的形式。

例 16 y 是由$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$($a$,$b$ 为正实数)所确定的关于 x 的函数,求 y'。

解: 等式两边同时对 x 求导,得 $\frac{1}{a^2}\cdot 2x+\frac{1}{b^2}\cdot 2y\cdot y'=0$,从而 $y'=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x}{y}$。

例 17 已知 y 是由 $y=\cos x+\frac{1}{2}\cos y$ 所确定的 x 的函数，试求 $y'|_{x=\frac{2\pi}{3}}$。

解： 方程两边同时对 x 求导，得 $y'=-\sin x-\frac{1}{2}\cdot\sin y\cdot y'$，从而 $y'=-\dfrac{\sin x}{1+\frac{1}{2}\sin y}$，又由函数方程知 $x=\frac{2}{3}\pi$ 时，$y=0$，所以

$$y'|_{x=\frac{2\pi}{3}}=-\frac{\sin\frac{2\pi}{3}}{1+\frac{1}{2}\sin 0}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

例 18 荷兰生物学家 Verhulst 在 1939 年研究了生物圈内的总群数的生长规律，可表达为如下方程：

$W=W_0\dfrac{1+b}{1+be^{-kt}}$，其中 W_0 为初始时总群数，而 b、k 为相关的常数，试求$\dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}$。

解： 将上述方程化为隐函数形式

$$W+b\mathrm{e}^{-kt}W=W_0(1+b)$$

两边同时对 t 求导，$W'-kb\mathrm{e}^{-kt}W+b\mathrm{e}^{-kt}W'=0$ 整理得$\dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}=\dfrac{kb\mathrm{e}^{-kt}}{1+b\mathrm{e}^{-kt}}W$，将 W 的表达式代入上式，有

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}=\frac{W_0(1+b)bk\mathrm{e}^{-kt}}{(1+b\mathrm{e}^{-kt})^2}$$

2.2.4 对数求导法

例 19 已知下列各函数，分别求其导数 y'。

(1) $y=\sqrt{\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}$　　(2) $y=x^{\alpha}$（α 为任意实数）

(3) $y=a^x(a>0,a\neq 1)$　　(4) $y=x^x$

(5) $y=x^{x^2}$　　(6) $y=\sqrt[x]{(x+1)(x+2)}$

读者仔细思考，这些是用取对数求导法的同类题，这里我们只做(1)、(2)、(3)题，(4)、(5)及(6)留给读者自做练习。

解： (1)两边同取对数，得

$\ln y=\frac{1}{2}[\ln(x-1)+\ln(x-2)-\ln(x-3)-\ln(x-4)]$两边同时对 x 求导，得

$$\frac{1}{y}y'=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}\right)$$

因而

$$y'=\frac{y}{2}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}\cdot\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}\right)$$

(2)对 $y=x^{\alpha}$ 两边同取对数，得

$\ln y=\alpha\ln x$

两边同对 x 求导，得$\frac{1}{y}y' = \alpha \frac{1}{x}$

所以 $y' = y \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = x^{\alpha} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = \alpha \cdot x^{\alpha - 1}$

即　对任意实数 α，有 $(x^{\alpha})' = \alpha \cdot x^{\alpha - 1}$ (2-19)

(3)对 $y = a^x$ 两边同取对数，得

$\ln y = x \ln a$

两边同对 x 求导，得$\frac{1}{y} \cdot y' = \ln a$，所以

即
$$y' = y \cdot \ln a = a^x \cdot \ln a$$
$$(a^x)' = a^x \ln a \tag{2-20}$$

特别地，当 $a = \mathrm{e}$ 时，$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$

例 20　y 是由 $x \cdot \mathrm{e}^y + \mathrm{e}^x = 0$ 所确定的 x 的函数，求 y'。

解：　两边同时对 x 求导，得

$$(x)' \cdot \mathrm{e}^y + x \cdot (\mathrm{e}^y)' + (\mathrm{e}^x)' = 0$$

即

$$\mathrm{e}^y + x \cdot \mathrm{e}^y \cdot y' + \mathrm{e}^x = 0$$

整理得

$$y' = -\frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^y}{x \cdot x^y}$$

2.2.5　反函数求导法

【定理 2】　对于函数 $y = f(x)$，它在某个开区间内严格单调、连续，它的反函数(inverse function)$x = \varphi(y)$在 y_0 处可导，且$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\Big|_{y = y_0} \neq 0$，则 $y = f(x)$在对应点 $x_0 = \varphi(y_0)$处也可导，且

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x = x_0} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\Big|_{y = y_0}} \tag{2-21}$$

(证略)

例 21　已知 $y = \arcsin x$，$z = \arccos x$，求 y' 及 z'。

解：　$x = \sin y$ 在$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$内严格单调、连续，且$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \cos y \neq 0$，由定理 2 知在 x 所对应的区间$(-1, 1)$内，有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

即

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \tag{2-22}$$

类似可得

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \tag{2-23}$$

例 22　已知 $y = \mathrm{arctg} x$，$z = \mathrm{arccot} x$，求 y' 与 z'。

解： $x=\text{tg}y$ 在$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$内严格单调、连续，且$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\sec^2 y\neq 0$，由定理 2，可知在 x 所对应的区间$(-\infty,+\infty)$内，有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}=\frac{1}{\sec^2 y}=\frac{1}{1+\text{tg}^2 y}=\frac{1}{1+x^2}$$

即 $$(\text{arctg}x)'=\frac{1}{1+x^2} \tag{2-24}$$

类似可得 $$(\text{arcctg}x)'=-\frac{1}{1+x^2} \tag{2-25}$$

例 23 已知 $y=\mathrm{e}^{\arcsin x}$，求 y'。

解： $y'=\mathrm{e}^{\arcsin x}\cdot(\arcsin x)'=\frac{\mathrm{e}^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}$

例 24 设 $f(u)$可导，$y=f(\text{tg}x)$，求$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$。

解：
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=f'(\text{tg}x)\cdot(\text{tg}x)' \qquad (\text{这里 } u=\text{tg}x)$$
$$=f'(\text{tg}x)\cdot\sec^2 x$$

2.2.6 高阶导数

对于 $y=f(x)$而言，它的导数 $y'=f'(x)$仍是 x 的函数，如果 $y'=f'(x)$的导数也存在，则称其为 $y=f(x)$的二阶导数，记为 y''或$f''(x)$或$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$或$\frac{\mathrm{d}^2f(x)}{\mathrm{d}x^2}$。$y=f(x)$的三阶导数或三阶以上的导数可类似定义。

一般地，如果 $y=f(x)$的 $n-1$ 阶导数对 x 的导数仍存在，则称该导数为 $y=f(x)$的 n 阶导数，记作 $y^{(n)}$或 $f^{(n)}(x)$或$\frac{\mathrm{d}^nf(x)}{\mathrm{d}x^n}$或$\frac{\mathrm{d}y^n}{\mathrm{d}x^n}$。

由上述定义，可知

$$y^{(n)}=[y^{(n-1)}]'=\frac{\mathrm{d}[y^{(n-1)}]}{\mathrm{d}x}$$

$y=f(x)$的二阶及二阶以上的导数统称为 y 的高阶导数(higher derivatives)。

例 25 已知 $y=\mathrm{e}^{ax}(a\neq 0)$，求 $y^{(n)}$。

解： $y'=[\mathrm{e}^{ax}]',=\mathrm{e}^{ax}\cdot(ax)'=a\cdot\mathrm{e}^{ax}$

$y''=[a\cdot\mathrm{e}^{ax}]'=a\cdot[\mathrm{e}^{ax}]'=a^2\cdot\mathrm{e}^{ax},\cdots,$

所以 $y^{(n)}=a^n\cdot\mathrm{e}^{ax}$

例 26 y 是由 $\mathrm{e}^y=xy$ 所确定的 x 的函数，求 y''。

解： 两边同对 x 求导，得 $\mathrm{e}^x\cdot y'=y+xy'$所以 $y'=\frac{y}{\mathrm{e}^y-x}$，对上述等式两边再对 x 求导，得 $\mathrm{e}^y(y')^2+\mathrm{e}^y\cdot y''=y'+y'+xy''$，整理并将 y'代入得 $y''=\frac{2y(\mathrm{e}^y-x)-\mathrm{e}^y\cdot y^2}{(\mathrm{e}^y-x)^3}=\frac{y(2y-2-y^2)}{x^2(y-1)^3}$

2.3 微　　分

实际问题中，常常需要考察函数的改变量，特别是当$|\Delta x|$很小时，需要的只是Δy的近似值，有时是有简便方法可行的。为此需要引入微分的概念。

2.3.1 微分的定义

【定义 2】 设函数$y=f(x)$在x的某个领域内有定义，如果函数的增量$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$可以表示为

$$\Delta y - A\cdot\Delta x+0(\Delta x) \tag{2-26}$$

其中A是不依赖于Δx的x的函数，$0(\Delta x)$是当$\Delta x\to 0$时比Δx高阶的无穷小，则称函数$y=f(x)$在点x处可微，并称$A\cdot\Delta x$为函数$y=f(x)$在x处的微分(differential)，记作$\mathrm{d}y$，即

$$\mathrm{d}y=A\cdot\Delta x \tag{2-27}$$

如果$y=f(x)$在点x处可微，在式(2-26)两端同除以Δx，得$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=A+\dfrac{o(\Delta x)}{\Delta x}$，由$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=A$可得

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=A$$

即有

$$\mathrm{d}y=f'(x)\Delta x \tag{2-28}$$

当$f'(x)\neq 0$时，称函数的微分$\mathrm{d}y=f'(x)\Delta x$为函数增量的线性主要部分，而当$|\Delta x|$很小时，有$\Delta y\approx \mathrm{d}y$，当$y=x$时，由式(2-28)可知，$\mathrm{d}y=\mathrm{d}x=1\cdot\Delta x$，从而有$\mathrm{d}x=\Delta x$，因而式(2-28)可写成

$$\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x \tag{2-29}$$

由上述表达式可以看出，$f'(x)$可认为是$\mathrm{d}y$与$\mathrm{d}x$之商，即$f'(x)=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，因而导数也称作微商，实际上微分只不过是导数的另一种表达形式，两者在实质上是一回事。

2.3.2 微分的几何意义

为了直观说明微分与改变量之间的关系，我们看一看微分的几何意义。

函数$y=f(x)$的曲线图形如图 2-4 所示，在曲线上取点$M(x_0,y_0)$及点$N(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$，过$M$点作曲线的切线$MT$，由图可知

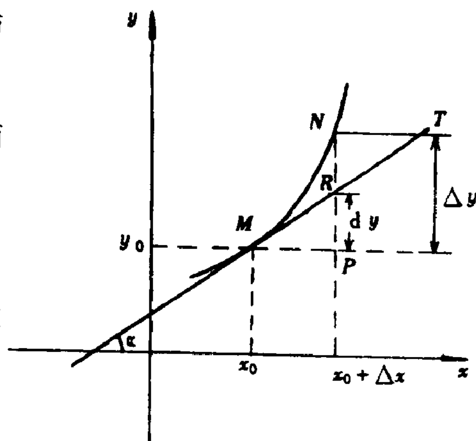


图 2-4

$$MP=\Delta x,\quad NP=\Delta y$$

于是，$PR=\mathrm{tg}\alpha\cdot\Delta x=f'(x_0)\Delta x=\mathrm{d}y$，这就是说，当给自变量$x_0$以改变量$\Delta x$时，微分$dy=$

$f'(x_0)\Delta x$的几何意义就是函数 $y=f(x)$的曲线在点 $M(x_0,y_0)$处的切线 MT 在 Δx 这段上纵坐标的改变量,而函数的增量 Δy 是曲线本身在 Δx 这段上的纵坐标的改变量。

2.3.3 微分的计算

微分既然是导数的另一种表达形式,那么由导数的四则运算法则,自然可以推出微分的四则运算法则。

一、微分的四则运算法则

(1) $d(u\pm v)=du\pm dv$ (2-30)

(2) $d(u\cdot v)=vdu+udv$ (2-31)

(3) $d(\frac{u}{v})=\frac{vdu-udv}{v^2}$ (2-32)

二、一阶微分的形式不变性

关于复合函数的微分公式,具有所谓的“一阶微分的形式不变性。”设函数 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$可导,即$\frac{dy}{dx}=f'(u)\cdot g'(x)$,则复合函数 $y=f[g(x)]$在 x 点的微分为

$$dy=f'(u)\cdot g'(x)dx$$

对于 $u=g(x)$而言,$du=g'(x)dx$,因此

$$dy=f'(u)\cdot[g'(x)dx]=f'(u)du$$

从上式可看出,复合函数的微分公式 $dy=f'(u)du$ 无论 u 是中间变量还是直接变量都成立,也就是说一阶微分公式在形式上没有变,称之为“一阶微分的形式不变性”。

例 27 求 $y=x^2$ 在 $x=1,x=2$,且 $\Delta x=0.1$ 时的微分。

解: $dy=2xdx=2x\cdot\Delta x$

$dy\Big|_{\substack{x=1\\ \Delta x=0.1}}=2\times1\times0.1=0.2$;$dy\Big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=0.1}}=2\times2\times0.1=0.4$

例 28 已知 $y=e^{tgx}$,求 dy。

解: $dy=e^{tgx}d(tgx)=e^{tgx}\cdot\sec^2xdx$

2.3.4 微分在误差估计及近似计算中的应用

一、函数值的误差估计

设 y 是 x 的函数,如果测得 x 的值为 x_0,且测量误差为 Δx,那么计算 y 时将产生误差 $\Delta y=f(x_0+\Delta_x)-f(x_0)$。我们把$|\Delta x|$与$|\Delta y|$分别称为 x 和 y 的绝对误差(absolute error),而把$\left|\frac{\Delta x}{x}\right|$和$\left|\frac{\Delta y}{y}\right|$分别称为 x 和 y 的相对误差(relative error)。当$|\Delta x|$很小时,可用 $dy=f'(x_0)\Delta x$ 近似代替 Δy,因而有如下近似计算$|\Delta y|$及$\left|\frac{\Delta y}{y}\right|$的公式

$$|\Delta y|\approx|f'(x_0)|\cdot|\Delta x| \quad (2\text{-}33)$$

$$\left|\frac{\Delta y}{y}\right|\approx\left|\frac{f'(x_0)}{f(x_0)}\right|\cdot|\Delta x| \quad (2\text{-}34)$$

利用以上两式可以计算实际应用中常遇到的两类误差估计问题。

(1)已知测量 x 所产生的误差，估计由 x 的误差所引起的 y 的误差。

(2)根据 y 所允许的误差，近似地确定测量 x 时所允许的误差。

例 29　设已测得一圆的半径 r 为 21.5 厘米，且测量的绝对误差不超过 0.1 厘米，求计算圆的面积 S 时所产生的绝对误差。

解： 已知 r 的测量值为 $r_0=21.5$ 厘米，绝对误差 $|\Delta r|\leqslant 0.1$ 厘米，因此 S 的绝对误差为

$|\Delta S|\approx|S'(r_0)|\cdot|\Delta r|=2\pi r_0\cdot|\Delta r|\leqslant 2\pi\times 21.5\times 0.1=4.3\pi$(厘米^2)

例 30　从一批密度均匀的药丸中，把所有直径等于 1.0 厘米的胶丸挑出来。如果挑出来的胶丸在半径上允许有 3% 的相对误差，并且选择的方法以重量为依据，试问在挑选时称量重量的相对误差应不超过多少？

解： 设胶丸的密度为 ρ，半径为 r(单位为厘米)，重量为 W，则有 $W=g\cdot\rho\cdot\frac{4}{3}\pi r^3$

由于 $\mathrm{d}W=4\pi g\cdot\rho\cdot r^2\cdot\Delta r$，因而 $\left|\frac{\mathrm{d}W}{W}\right|=\left|\frac{4\pi g\rho r^2\Delta r}{\frac{4}{3}\pi g\rho r^3}\right|=3\left|\frac{\Delta r}{r}\right|$，从而 $\left|\frac{\Delta r}{r}\right|=\frac{1}{3}\left|\frac{\mathrm{d}W}{W}\right|\approx\frac{1}{3}\left|\frac{\Delta W}{W}\right|$，要使 $\left|\frac{\Delta r}{r}\right|\leqslant 3\%$，只要 $\frac{1}{3}\left|\frac{\Delta W}{W}\right|\leqslant 3\%$ 即可，因而 $\left|\frac{\Delta W}{W}\right|\leqslant 9\%$。我们可根据这个误差限度选择具有适当精确度的称量仪器。

二、微分的近似计算

当 $|\Delta x|$ 很小时，由式(2-33)可得

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x \tag{2-35}$$

上式可用于计算 x_0 附近的函数值 $f(x_0+\Delta x)$ 的近似值。

例 31　计算 sin44°的近似值。

解： 设 $y=f(x)=\sin x$，$f'(x)=\cos x$，$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以

$$\begin{aligned}\sin 44^\circ&=f\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{180}\right)\approx f\left(\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\pi}{180}\cdot f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\pi}{180}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\\&=0.7071-0.7071\times 0.0175\approx 0.6947\end{aligned}$$

例 32　求 $\sqrt{3}$ 的近似值。

解： 设 $y=f(x)=\sqrt{x}$　则

$y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$，取 $x_0=3.0276$，我们有

$f(x_0)=\sqrt{3.0276}=1.74$，　$f'(x_0)=\frac{1}{2\times\sqrt{3.0276}}=\frac{1}{2\times 1.74}$，所以

$$\begin{aligned}\sqrt{3}&=f(3.0276-0.0276)\approx f(3.0276)+f'(3.0276)\times(-0.0276)\\&=1.74+\frac{1}{2\times 1.74}\times(-0.0276)\approx 1.74-0.008=1.732\end{aligned}$$

当 $|x|$ 很小时，利用式(2-35)可以证明以下常用的近似公式：

(1) $(1+x)^m\approx 1+mx$　　(2) $e^x\approx 1+x$

(3) $\ln(1+x)\approx x$　　(4) $\sin x\approx x$(x 为弧度)

(5) $\text{tg}x \approx x$（x 为弧度）

(6) $\sqrt[n]{a^n + x} \approx a\left(1 + \dfrac{x}{n \cdot a^n}\right)$ （当$\left|\dfrac{x}{a^n}\right|$很小时）

2.4 导数的应用

我们现在已经知道，导数刻画了函数在某一点的变化的快慢，换句话说，导数描述了曲线在某点的倾斜程度，因而导数可用于研究函数的增减性；当函数的增减性发生逆转时，往往会有函数极值的出现，因而导数又可用于研究函数的极值；此外，二阶导数可用于研究函数曲线的弯曲方向。我们将从以下几个方面阐述导数的应用。

2.4.1 拉格朗日中值定理

函数在某一点可导，我们说在这点曲线上的切线存在，如果函数在某一区间内可导，那么过这段曲线端点的直线必与该区间内某一点的切线有关，下面的拉格朗日（Lagrange）中值定理（the mean value theorem）就明确回答了上述问题。

【定理 3】 如果函数 $y = f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，在开区间 (a, b) 内可导，则在开区间 (a, b) 内至少存在一点 ξ，使得

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi) \qquad (a < \xi < b) \tag{2-36}$$

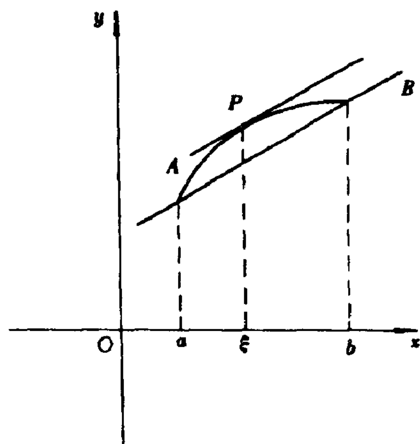


图 2-5

拉格朗日定理的证明需要费尔玛定理或罗尔定理，我们就不证明拉格朗日定理，只作出几何上的解释。

如图 2-5 所示，设曲线端点为 A，B，直线 AB 为曲线的割线。如果沿与直线 AB 垂直的方向往曲线弧平行移动割线 AB，由于 $f(x)$ 在 (a, b) 内可导，则 A 与 B 必将重合交于曲线上的一点 P，此时的直线就成为曲线的切线，P 点的横坐标 ξ 即为满足定理结论的点。

拉格朗日中值定理揭示了函数在一段区间上的平均变化率必与该区间内某一点的函数变化率相同的性质，据此就可利用区间内某一点的局部性质来研究函数在该区间上的整体性质。

【推论 3】 如果函数 $y = f(x)$ 在区间 (a, b) 上每一点的导数都为零，即 $f'(x) = 0$，则函数 $y = f(x)$ 在区间 (a, b) 上恒等于一个常数。

证： 设 x_1 和 x_2 为区间 (a, b) 内的任意两点（$x_1 < x_2$），由拉格朗日中值定理，必在 (x_1, x_2) 内存在一点 ξ，使得

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi) \cdot (x_2 - x_1)$$

因而 $f(x_2) - f(x_1) = 0$，由于 x_1，x_2 是 (a, b) 内任取的两点，所以上式表明 $y = f(x)$ 在 (a, b) 内处处相等，亦即 $f(x)$ 在 (a, b) 内恒为常数。

【推论 4】 如果两个函数 $\varphi(x)$与 $\psi(x)$在(a,b)上每一点的导数都相等,则 $\varphi(x)$与 $\psi(x)$在区间(a,b)上仅相差一个常数。

证: 设 $F(x)=\varphi(x)-\Psi(x)$,则 $F(x)$满足推论 3 的条件,因而 $F(x)\equiv c$,亦即 $\varphi(x)=\Psi(x)+c$。

例 33 证明 $|\sin x_2-\sin x_1|\leqslant|x_2-x_1|$对一切 x_1,x_2 都成立。

证: 设 $y=\sin x$,对该函数在$[x_1,x_2]$上应用拉格朗日中值定理$(x_1\neq x_2)$,这里不妨假定 $x_1<x_2$,则$|\sin x_2-\sin x_1|=|\cos\xi\cdot(x_2-x_1)|\leqslant|x_2-x_1|$,$\xi\in(x_1,x_2)$当 $x_1=x_2$ 时,上式的等号成立,因而对一切 x_1,x_2,命题的结论成立。

例 34 试证 $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$,$x\in[-1,1]$。

证: 设 $y=\arcsin x+\arccos x$,则

$$y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=0$$

由推论 3 知 y 在$(-1,1)$内恒为常数,即

$$\arcsin x+\arccos x=c$$

又由于 y 在$[-1,1]$上连续,因而上式在$[-1,1]$内成立,令 $x=0$,即得 $c=\frac{\pi}{2}$,从而结论成立。

2.4.2 洛必达(L'Hospital)法则

我们在研究极限式 $\lim\limits_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}}\frac{f(x)}{g(x)}$时,如果当 $x\to a$(或 $x\to\infty$)时,$f(x)$和 $g(x)$都趋于零或都趋于无穷大,那么上述极限可能存在也可能不存在,通常把上述极限叫做不定式,简记为$\frac{0}{0}$型或$\frac{\infty}{\infty}$型。上述极限式不能用商的极限法则计算,为了解决这类问题,给出如下的洛必达法则。

【定理 4】 $\left(\frac{0}{0}\text{型}\right)$设当$(x\to x_0)$(或 $x\to\infty$)时,$\lim f(x)=0$,$\lim g(x)=0$;如果 $g'(x)\neq 0$,并且 $\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$,则

$$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}=A \tag{2-37}$$

式(2-37)中的 A 可以是无穷大。(证略)

【定理 5】 $\left(\frac{\infty}{\infty}\text{型}\right)$设当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时,$\lim f(x)=\infty$,$\lim g(x)=\infty$;如果 $\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$,则

$$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}=A \qquad (2\text{-}37)'$$

式(2-37)′中的A 也可以是无穷大(证略)。

通过以上两个定理,求$\frac{f(x)}{g(x)}$的极限就可化为求$\frac{f'(x)}{g'(x)}$的极限,如果$\frac{f'(x)}{g'(x)}$仍是不定式,则可继续使用洛必达法则,即

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} \frac{f''(x)}{g''(x)}$$

上述做法可一步步做下去，直到某个$\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$不再是不定式时为止。

从上面两定理的叙述不难看出，导数之比实际上是将函数值之比进行了降阶处理，因而降低了求极限的难度。在使用洛必达法则时应注意以下几个点：

1. 适用下面两种情况

(1)当 $x \to x_0 (x \to \pm\infty)$时，$f(x) \to 0$、$g(x) \to 0$；

(2)当 $x \to x_0 (x \to \pm\infty)$时，$f(x) \to \pm\infty$、$g(x) \to \pm\infty$。

2. 每次应用洛必达法则必须检验是否满足应用法则所需要的条件。

3. 如果有可以约的因子或极限为零的可约因子，应先约去，这样可以简化演算过程。

例 35 求 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$。

解： $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2} \lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = \frac{1}{2}$

例 36 求 $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$。

解： $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{3x^2-3}{3x^2-2x-1} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{6x}{6x-2} = \frac{3}{2}$

例 37 求 $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^{\alpha}} (\alpha > 0)$。

解： $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^{\alpha}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha \cdot x^{\alpha-1}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\alpha \cdot x^{\alpha}} = 0$

例 38 求 $\lim\limits_{x \to a} \frac{a^x - x^a}{x-a} (a > 0)$。

解： $\lim\limits_{x \to a} \frac{a^x - x^a}{x-a} = \lim\limits_{x \to a} \frac{a^x \cdot \ln a - a \cdot x^{a-1}}{1} = a^a(\ln a - 1)$

例 39 求 $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^n}{e^{\lambda x}}$($n$ 为自然数，$\lambda > 0$)。

解： 连续运用 n 次洛必达法则，得

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{e^{\lambda x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{n \cdot x^{n-1}}{\lambda e^{\lambda x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{n \cdot (n-1) \cdot x^{n-2}}{\lambda^2 \cdot e^{\lambda x}} = \cdots$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{n!\ x^{n-n}}{\lambda^n e^{\lambda x}} = 0$$

有时，我们会遇到型如 0^{∞}、$0 \cdot \infty$、1^{∞}、0^0 以及$\infty - \infty$类的极限求解问题，此时，可通过适当变型，将其化为$\frac{0}{0}$型或$\frac{\infty}{\infty}$型而求之。

例 40 求 $\lim\limits_{x \to 0}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right)$，($\infty - \infty$型)。

解： 将上式通分后即可化为$\frac{0}{0}$型

$$\lim_{x \to 0}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x \sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{\sin x + x \cdot \cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2\cos x - x\cdot\sin x}=0$$

例 41 求 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\alpha}\ln x(\alpha>0)$,($0\cdot\infty$型)。

解: $$\lim_{x\to 0^+} x^{\alpha}\cdot\ln x = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x^{-\alpha}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{(-\alpha)\cdot x^{-\alpha-1}}$$

$$=\left(-\frac{1}{\alpha}\right)\cdot\lim_{x\to 0^+}x^{\alpha}=0$$

例 42 求 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{2x}$,($0^0$ 型)。

解: $$\lim_{x\to 0^+} x^{2x}=\lim_{x\to 0^+}e^{\ln x^{2x}}=\lim_{x\to 0^+}e^{2x\ln x}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}e^{2\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}}=e^{2\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-x_2}\cdot\frac{\frac{1}{x}}{-x^2}}=e^{2\lim\limits_{x\to 0^+}(-x)}=1$$

例 43 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\pi}\mathrm{arctg}x\right)^{x}$,($1^{\infty}$型)。

解: $$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\pi}\mathrm{arctg}x\right)^{x}=\lim_{x\to+\infty}e^{x\ln\left(\frac{2}{\pi}\mathrm{arctg}x\right)}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\frac{2}{\pi}\mathrm{arctg}x\right)}{\frac{1}{x}}}=e^{-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\mathrm{arctg}x}\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+x^2}}=e^{-\frac{2}{\pi}}$$

在应用洛必达法则时需注意:

虽然有时两个函数当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时,二者同趋于无穷大或同趋于零,但如果它们的导数之比的极限不存在且不为无穷大,则应用洛必达法则时会导致错误的结果。

例 44 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{x-\sin x}$。

解: 应用洛必达法则,有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{x-\sin x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\cos x}{1-\cos x}$$

对上式右端来说,如果取两个子列 $x_{k1}=2k\pi$ 及 $x_{k2}=2k\pi+\frac{\pi}{2}$,则当上述两子列趋于无穷大时,$\frac{1+\cos x}{1-\cos x}$分别趋于$\infty$及 1,因此它的极限不存在。但对$\frac{x+\sin x}{x-\sin x}$来说,$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{\sin x}{x}}{1-\frac{\sin x}{x}}=1$,因而此例应用洛必达法则出现了错误,之所以如此就在于导数之比的极限不存在,且不为∞,所以并不满足应用定理的条件。

2.4.3 函数增减性和函数的极值

一、函数的增减性及其判定

从几何图形上看,导数大于零的点,过该点的曲线切线与 x 轴正向成锐角,因而可以认为曲线在此点向右上方倾斜,函数将单调增加;而在导数小于零的点,过该点的曲线切

线与 x 轴正向成钝角,因而曲线从此点往右向右下方倾斜,函数将单调减少。

既然导数符号与函数的增减有如此密切的关系,那么就可利用导数来研究函数的增减性。

【定理 6】 设函数 $y=f(x)$,在区间 (a,b) 内可导,那么

1° 如果在区间 (a,b) 内,$f'(x)>0$,则函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内是单调增函数。

2° 如果在区间 (a,b) 内,$f'(x)<0$,则函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内是单调减函数。

证: 在 (a,b) 内任取两点 x_1 与 x_2,且使 $x_1<x_2$,则 $f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上满足拉格朗日定理,从而在 (x_1,x_2) 上存在一点 ξ,满足

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)$$

如果 $f(x)$ 满足条件 1,则 $f'(\xi)>0$,又由 $x_1<x_2$,可得 $f(x_2)-f(x_1)>0$,即 $f(x)$ 为增函数。

如果 $f(x)$ 满足条件 2,同理可证 $f(x)$ 为减函数。

注: 定理 6 只是判断函数增减性的充分条件,而非必要条件。例如函数 $y=x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 是单调增函数,但在 $(-\infty,+\infty)$ 上,y' 并不总是大于零,因为在 $x=0$ 点,有 $y'=0$。事实上,我们可以证明:若 $f(x)$ 是 (a,b) 上可导的单调增函数(或单调减函数),则在 (a,b) 上必有 $f'(x)\geqslant 0$(或 $f'(x)\leqslant 0$)。感兴趣的读者不妨证明之。

例 45 试证当 $x\geqslant 0$ 时,$x\geqslant \mathrm{arctg}x$。

证: 令 $f(x)=x,g(x)=\mathrm{arctg}x,G(x)=f(x)-g(x)$,则 $G'(x)=f'(x)-g'(x)=1-\dfrac{1}{1+x^2}=\dfrac{x^2}{1+x^2}$

当 $x\in(0,+\infty)$ 时,$G'(x)>0$,因而 $G(x)$ 为 $[0,+\infty)$ 上的增函数,而当 $x=0$ 时,$G(0)=0-\mathrm{arctg}0=0$,所以当 $x>0$ 时,总有 $G(x)>G(0)=0$ 成立,即

$x-\mathrm{arctg}x>0$ 当 $x>0$ 时成立。

因而当 $x\geqslant 0$ 时,总有 $x\geqslant \mathrm{arctg}x$ 成立。

例 46 列表讨论函数 $y=2x^3-9x^2+12x-3$ 的增减性。

解: 函数 y 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$

$$y'=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$$

令 $y'=0$,解得 $x_1=1,x_2=2$,它们把 $(-\infty,+\infty)$ 分成了三部分:$(-\infty,1)$,$(1,2)$ 和 $(2,+\infty)$,函数的增减规律分列如下:

表 2-1 函数 $y=2x^3-9x^2+12x-3$ 的单调区间

x	$(-\infty,1)$	1	$(1,2)$	2	$(2,+\infty)$
y'	+	0	−	0	+
y	↗		↘		↗

函数图形如图 2-6 所示。

从上例可知,在讨论函数的单调性时,可先求导数,然后令导数为零,根据根的情况将函数定义域分成不同的区间,由导数在这些区间的正负判断函数在这些区间的增减。如

果相邻两区间的导数符号无变化，虽然区间分界点的导数为零，但并不影响这两个区间上函数增减的一致性，因而可将这两个区间合并成一个区间讨论。此外，如果在定义域内有导数不存在的点，则此点也可能是增减区间的分界点。

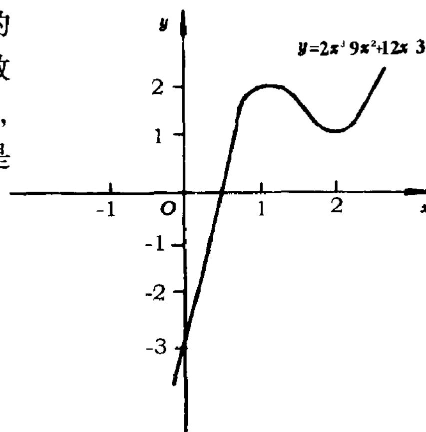


图 2-6

例 47 确定 $y=\sqrt[3]{x^2}$ 的单调区间。

解： $y=\sqrt[3]{x^2}$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$。

当 $x\neq 0$ 时，$y'=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$；

当 $x=0$ 时，$y=\sqrt[3]{x^2}$ 的导数不存在。

函数 $y=\sqrt[3]{x^2}$ 的增减规律分列如下：

表 2-2 函数 $y=\sqrt[3]{x^2}$ 的单调区间

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,+\infty)$
y'	−	不存在	+
y	↘		↗

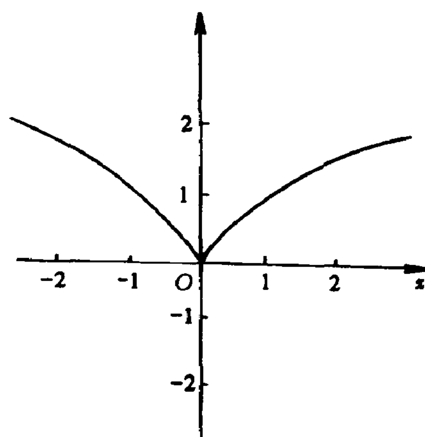


图 2-7

函数图形如图 2-7 所示。

二、函数极值及其判定方法

【定义 3】 设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的一个邻域内有定义，对于该邻域内除 x_0 外的任何点 x 都有 $f(x)<f(x_0)$ 成立，就说 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的一个极大值（maximum），x_0 为函数 $f(x)$ 的极大值点；如果 $f(x)>f(x_0)$ 成立，就说 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的一个极小值（minimum），x_0 为函数 $f(x)$ 的极小值点。

函数的极大值和极小值统称为函数的极值，使函数取得极值的点叫函数的极值点（extreme point）。

函数的极大值和极小值是针对某一点及其该点的邻域而言的，它是函数的局部性质。在一个区间上，如果函数有几个极大值和几个极小值，则其极大值有可能比某些极小值还小，如图 2-8 所示，$f(x_5)>f(x_2)$，而 $f(x_5)$ 却是极小值，$f(x_2)$ 是极大值。

从图 2-8 还可看出，在函数取得极值处，曲线上的切线与 x 轴平行；但反过来，如果曲线上某处的切线与 x 轴平行，该点却不一定是极值点。如函数 $y=x^3$，在 $x=0$ 时，$y'=0$，但该点不是函数 $y=x^3$ 的极值点，见图 2-9。

我们将借助于导数，给出函数极值的判定方法。

【定理 7】 （必要条件）如果函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 可导，且取极值，则 $f'(x_0)=0$。

证： 我们仅就 $f(x_0)>f(x)$（x 属于 x_0 的某一邻域）的情形做出证明，$f(x_0)<$

$f(x)$时仿此可证。

当 $x<x_0$ 时，$f(x)<f(x_0)$

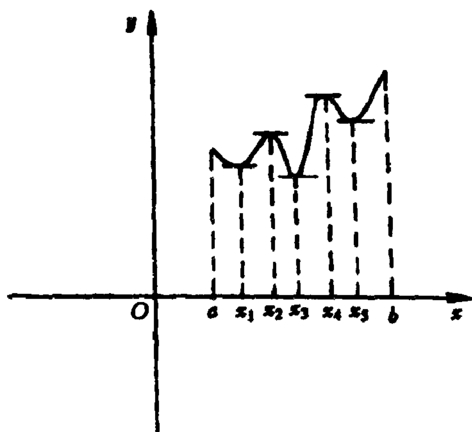


图 2-8

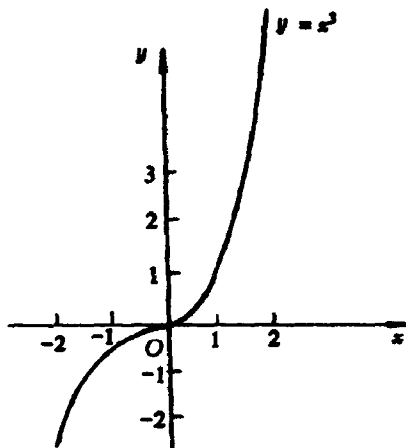


图 2-9

所以 $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geqslant 0$

当 $x>x_0$ 时，$f(x)<f(x_0)$

所以 $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leqslant 0$

因此 $f'(x_0)=0$,证毕。

使导数为零的点叫做函数的驻点。可导函数的极值点必是它的驻点,反之则不一定。如 $y=x^3$,$x=0$ 是它的驻点,但却不是极值点。

判断驻点是否为极值点要判断该点左右的导数符号是否发生变化,此外导数不存在的点也可能是极值点,见例 50。

【定理 8】 (第一充分条件)设函数 $f(x)$在 x_0 的某一邻域内可导,且 $f'(x_0)=0$。当 x 从左到右经过 x_0 时:

1° 若导数 $f'(x)$由正变负,则函数 $f(x)$在 x_0 处取得极大值;

2° 若导数 $f'(x)$由负变正,则函数 $f(x)$在 x_0 处取得极小值;

3° 若导数 $f'(x)$不变号,则函数 $f(x)$在 x_0 处无极值。

证: 若 x 是 x_0 邻域内的任一点,则由拉格朗日中值定理,可知必在 x_0 与 x 之间存在一点 ξ,使 $f(x)-f(x_0)=f'(\xi)(x-x_0)$。

对于条件 1,当 $x<x_0$ 时,$f'(\xi)>0$,有 $f(x)<f(x_0)$;当 $x>x_0$ 时,$f'(\xi)<0$,有 $f(x)<f(x_0)$,所以当 $f'(x)$由正变负时,$f(x_0)$为极大值。

对于条件 2,当 $x<x_0$ 时,$f'(\xi)<0$,有 $f(x)>f(x_0)$;当 $x>x_0$ 时,由 $f'(\xi)>0$,则有 $f(x)>f(x_0)$,所以 $f'(x)$由负变正时,$f(x_0)$为极小值。

如果条件 3 满足,则 $f(x)$在 x_0 的某个邻域内是单调函数,所以 $f(x_0)$不是极值,x_0 也不是极值点。证毕。

由定理 7 和定理 8 给出求函数极值的步骤如下:

1° 求导数 $f'(x)$；

2° 求 $y=f(x)$的所有驻点及导数不存在的点；

3° 用定理 8 判定这些点是否为极值点。

例 48 求函数 $f(x)=(x-1)^2(x+1)^3$ 的极值。

解： 1. $f'(x)=2(x-1)(x+1)^3+(x-1)^2\cdot 3(x+1)^2$

$$=5(x-1)(x+1)^2\left(x-\frac{1}{5}\right)$$

2. 令 $f'(x)=0$，得驻点 $x_1=-1, x_2=\frac{1}{5}, x_3=1$

3. 该函数在$(-\infty,+\infty)$内处处可导，因而只根据驻点情况判定极值，列表如下：

表 2-3　$y=(x-1)^2(x+1)^3$ 的极值判定

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,\frac{1}{5})$	$\frac{1}{5}$	$(\frac{1}{5},1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	+	0	+	0	−	0	+
y	↗	无极值	↗	极大值	↘	极小值	↗

由上表可知，当 $x=\frac{1}{5}$时，函数有极大值，$f(\frac{1}{5})=1.106$；当 $x=1$ 时，函数有极小值，$f(1)=0$；函数在 $x=-1$ 点没有取得极值。函数简图如图 2-10 所示。

例 49 已知直线 $y=kx+b\ (k\neq 0)$，$A(x_0,y_0)$是直线外的一点，试求 A 到直线 $y=kx+b$的距离。

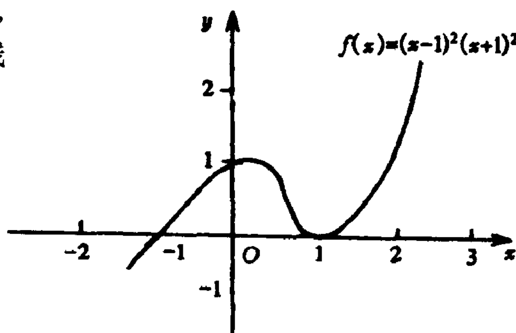


图 2-10

解： 设 $B(x,y)$为直线上的任一点，则

$$y=kx+b$$

令 A 到B 的距离为z，则

$$z=\sqrt{(x-x_0)^2+(kx+b-y_0)^2}$$

将 z 对x 求导，得

$$z'=\frac{(k^2+1)x+kb-(x_0+ky_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(kx+b-ky_0)^2}},$$

令 $z'=0$，得驻点

$$x_d=\frac{x_0+y_0-kb}{1+k^2}$$

当 $x<x_d$ 时，$z'<0$，而当 $x>x_d$ 时，$z'>0$，从而 $x=x_d$ 即为 $z=\sqrt{(x-x_0)^2+(kx+b-y_0)^2}$ 的极小值点，此时的 z 就是A 到直线 $y=kx+b$ 的距离d，将驻点值代入，得

$$d=\frac{|y_0-kx_0-b|}{\sqrt{1+k^2}}$$

【定理 9】（第二充分条件）设 $f(x)$在点 x_0 处具有二阶导数，且 $f'(x_0)=0$，则：

1° 若 $f''(x_0)<0$，则 $f(x_0)$是 $f(x)$的极大值；

2° 若 $f''(x_0)>0$，则 $f(x_0)$是 $f(x)$的极小值；

3° 若 $f''(x_0)=0$，则不能决定 $f(x_0)$ 是否为 $f(x)$ 的极值，仍需判断一阶导数在 x_0 左右的符号变化情况，然后再得出结论。

证： 1° 由于 $f''(x_0)<0$，由二阶导数的定义，有 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}<0$，于是存在 x_0 的一个邻域，在该邻域内，成立下式

$$\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}<0,\qquad x\neq x_0$$

因为 $f'(x_0)=0$，所以 $\dfrac{f'(x)}{x-x_0}<0$，当 x 由左及右经过 x_0 时，$x-x_0$ 由负变正，由上面所得不等式结果，可知 $f'(x)$ 由正变负，由定理 8 知 $f(x)$ 在 x_0 取得极大值。

2° 与证明 1 类似。

3° 如果 $f''(x_0)=f'(x_0)=0$，则 $f(x)$ 在 x_0 的特点不能确定。如 $y_1=x^3$，满足条件 3，但在 $x=0$ 时却不能取到极值；$y_2=x^4$ 在 $x=0$ 时也满足条件 3，但在该点却能取到极值。

当函数在驻点处的二阶导数为零时，仍需由定理 8 来判定极值情况。

例 50 应用第二充分条件求函数 $f(x)=2x^3-9x^2+12x-3$ 的极值。

解： $f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$

$f''(x)=12x-18=6(2x-3)$

令 $f'(x)=0$，得驻点 $x_1=1,x_2=2$；$f''(1)=-6<0,f''(2)=6>0$。由定理 9，知 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值，$f_{\max}=2$；在 $x=2$ 处，$f(x)$ 取得极小值，$f_{\min}=1$。

例 51 求 $f(x)=(x^2-1)^3+1$ 的极值。

解： $f'(x)=6x(x-1)^2(x+1)^2$，令 $f'(x)=0$，得驻点 $x_1=-1,x_2=0,x_3=1$

$f''(x)=6(x-1)(x+1)(5x^2-1)$，在驻点处二阶导数的取值情况为 $f''(-1)=f''(1)=0,f''(0)=6$ 因而由定理 9 知 $x=0$ 时，$f(x)$ 取极小值，$f(0)=0$；$x=\pm1$ 时需用定理 8 判定：当 x 由左及右经过 -1 时，$f'(x)$ 均为负；当 x 由左及右经过 1 时 $f'(x)$ 均为正，因而在 $x=\pm1$ 处，$f(x)$ 无极值，其函数简图如图 2-11 所示。

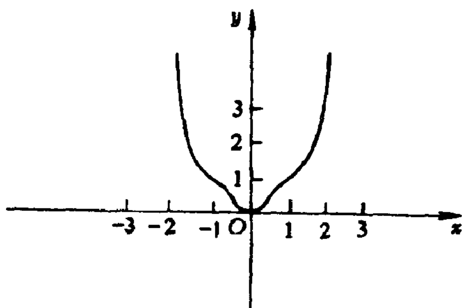


图 2-11

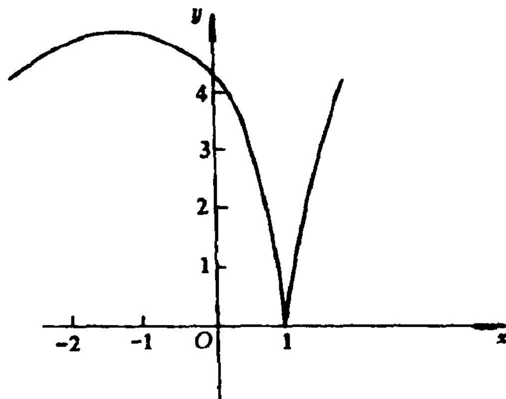


图 2-12

例 52 小血管中的轴流问题 血液由血细胞和血浆构成，血细胞的比重高于血浆。血液在血管中迅速流动时，血细胞有集中于血管中轴附近的倾向，而在靠近血管内膜的边缘部

位则主要是一层血浆。边缘部位由于血管壁的摩擦力而流速较慢,愈近中轴,流动愈快,此现象在流速相当高的小血管中最为显著,称为轴流。轴流理论认为:血细胞速度与血浆速度的相对值 v_r 依赖于血细胞的直径与它通过小血管直径之比 D_r,且有如下关系式:

$$v_r = 3.33(1+D_r^2)^{-1} - 0.67$$

其中

$$0 < D_r = \frac{\text{血细胞直径}}{\text{小血管直径}} < 1,\ v_r = \frac{\text{血细胞速度}}{\text{血浆速度}}$$

试求 v_r 关于 D_r 的一阶导数的极值。

解:

$$\frac{dv_r}{dD_r} = \frac{-3.33\times 2D_r}{(1+D_r^2)^2}$$

$$v''_r = -6.66\times\frac{1-3D_r^2}{(1+D_r^2)^3}$$

令 $v''_r = 0$,得 $Dr = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 又 $v'''_r = 12\times 6.66\times\frac{D_r(1-D_r^2)}{(1+D_r^2)^4} > 0$ 所以 $D_r = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 时 $\frac{dv_r}{dD_r}$ 取极小值。由于 $\frac{dv_r}{dD_r} < 0$,所以它的绝对值 $\left|\frac{dv_r}{dD_r}\right|$ 在 $D_r = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 处达到极大值。

我们最后讨论一下连续函数在闭区间上的最大值与最小值问题。

【定义 4】 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,将区间内所有极值和端点处的函数值 $f(a)$ 与 $f(b)$ 比较,其数值最大者与最小者分别称为函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上的最大值。

函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值和最小值可按定义 4 和求函数的极值方法求出。

例 53 求 $f(x) = e^{|x-3|}$ 当 $x\in[-5,5]$ 时的最大值与最小值。

解: 该函数是一个分段函数,可写成如下形式 $f(x) = \begin{cases} e^{x-3}, & 3 < x \leqslant 5 \text{ 时} \\ e^{3-x}, & -5 \leqslant x \leqslant 3 \text{ 时} \end{cases}$,该函数在 $[-5,5]$ 内连续,但在 $x=3$ 处不可导;当 $x\neq 3$ 时函数可导,$f(x)$ 的导数为 $f'(x) = \begin{cases} e^{x-3}, & 3 < x \leqslant 5 \\ -e^{3-x}, & -5 \leqslant x < 3 \end{cases}$,$f(x)$ 在所讨论的区间内无驻点,因而最大值或最小值只可能在 $x=\pm 5$ 及导数不存在的点 $x=3$ 处取得,在这些点处的函数值分别为:$f(-5) = e^8$,$f(5) = e^2$,$f(3) = 1$,由此知函数 $f(x) = e^{|x-3|}$ 在 $[-5,5]$ 的最大值为 $f(-5) = e^8$,最小值为 $f(3) = 1$。

例 54 在给定容积 V 的条件下,做一个有盖圆柱形罐头,问当高和底半径取多少时用料最省?

解: 所谓用料最省就是指罐头的表面积最小。设底半径为 r,高是 h,表面积为 S,则

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

因为 V 是定值,且 $V = \pi r^2 h$ 或 $h = \frac{V}{\pi r^2}$,将 $h = \frac{V}{\pi r^2}$ 代入 S 的表达式中,则 S 是 r 的函数

$$S(r) = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r},\ r\in(0,+\infty)$$

将 S 对 r 求导得 $S'(r) = 4\pi r - \frac{2V}{r^2}$,令 $S'(r) = 0$ 得 $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$,又由于 $r\to 0^+$ 及 $r\to+\infty$

时，$S(r)\to+\infty$，所以 S 在 $r=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ 时最小，此时 $h=\frac{V}{\pi r^2}=2r$。

由此可知：当容积给定时，圆柱形罐头的高等于底的直径时，该罐头用料最省。

2.4.4 函数的凹凸性及拐点

函数在某一点的导数可用于刻画曲线的倾斜度。但是，曲线在某一点的性态不仅由该点曲线的倾斜度来描述，还由曲线在该点的弯曲方向以及弯曲程度来决定。曲线在某点的弯曲方向以及弯曲程度的含义类似于变速直线运动中的加速度，因而可用函数的二阶导数来描述。

一、函数曲线的凹凸性

曲线的弯曲方向是用曲线与其切线的相对位置来描述的。

【定义 5】 如果一段曲线位于它上面任一点的切线上方，我们就称这段曲线是向上凹的(concave upwards)，如图 2-13；如果一段曲线位于其上任一点的切线下方，则称这段曲线是向上凸的(concave downwards)，如图 2-14 所示。

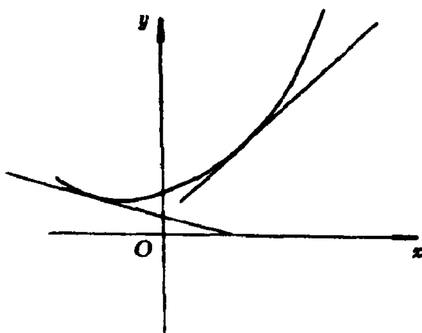


图 2-13

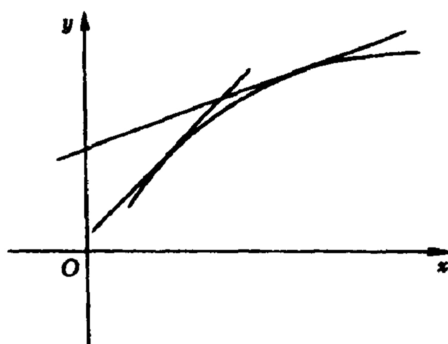


图 2-14

由图 2-13 和图 2-14 可见，一段曲线切线位置的变化状况能够反映该段曲线的凹凸性。曲线向上凹时，随着 x 的增大，切线与 x 轴正向的夹角也逐渐增大，从而其切线的斜率 $f'(x)$ 单调上升，$f''(x)\geqslant0$。类似可知，曲线向上凸时，$f''(x)\leqslant0$，这种性质可用下面的定理来说明。

【定理 10】 如果函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内具有二阶导数 $f''(x)$，则在该区间上，当 $f''(x)>0$ 时，曲线向上凹，并称 $f(x)$ 为凹函数；当 $f''(x)<0$ 时，曲线向上凸，称 $f(x)$ 为凸函数。

(证略)

二、曲线的拐点

如果曲线 $y=f(x)$ 在某点的凹凸性发生了改变，那么该点就称为曲线的拐点(inflection Point)。例如 $y=x^3$ 在 $(0,+\infty)$ 上是向上凹的，在 $(-\infty,0)$ 上是向上凸的，$(0,0)$ 点就是 $y=x^3$ 的拐点，过 $(0,0)$ 点的切线把曲线分成了凹凸不同的两部分。

需要注意的是：拐点可能是二阶导数为 0 的点，也可能是二阶导数不存在的点；反之，

二阶导数为 0 的点或二阶导数不存在的点却不一定是拐点。

判断函数曲线的凹凸性及拐点步骤如下：

1° 求 $f''(x)$；

2° 令 $f''(x)=0$，求出其在定义域内的根，同时找到在函数 $f(x)$ 定义域内不存在二阶导数的点；

3° 对每个实根（或二阶导数不存在的点），如 x_0，判断 $f''(x)$ 在 x_0 左右的符号，如果变号，则 x_0 是拐点，否则不是拐点；使 $f''(x)>0$ 的那段区间为上凹区间，使 $f''(x)<0$ 的那段区间为上凸区间。

例 55 讨论曲线 $y=(x-1)^{\frac{5}{3}}$ 的凹凸性及拐点。

解： $y'=\frac{5}{3}(x-1)^{\frac{2}{3}}$，$x=1$ 时 y 的二阶导数不存在；$x\neq 1$ 时，$y''=\frac{10}{9}(x-1)^{-\frac{1}{3}}$，它在定义域内无零点。我们列表讨论 $y=(x-1)^{\frac{5}{3}}$ 的凹凸性及拐点。

表 2-4 $y=(x-1)^{\frac{5}{3}}$ 的凹凸性及拐点

x	$(-\infty,1)$	1	$(1,+\infty)$
y''	−	不存在	+
y	上凸	拐点	上凹

此例中的拐点是使 $y=(x-1)^{\frac{5}{3}}$ 的二阶导数不存在的点，拐点坐标为(1,0)。

例 56 讨论函数 $y=\frac{2x}{1+x^2}$ 的单调性、极值及拐点。

解： $y'=\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}=\frac{2(1-x)(1+x)}{(1+x^2)^2}$

令 $y'=0$，得 $x_1=-1$，$x_2=1$，列表如下：

表 2-5 $y=\frac{2x}{1+x^2}$ 的单调性与极值

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	−	0	+	0	−
y	↘	极小值 -1	↗	极大值 1	↘

$$y''=\frac{4x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$$

令 $y''=0$，得 $x_1=-\sqrt{3}$，$x_2=0$，$x_3=\sqrt{3}$，列表如下：

表 2-6 $y=\frac{2x}{1+x^2}$ 的凹凸性与拐点

x	$(-\infty,-\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3},0)$	0	$(0,\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3},+\infty)$
y''	−	0	+	0	−	0	+
y	上凸	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 拐点	上凹	0 拐点	上凸	$\frac{\sqrt{3}}{2}$ 拐点	上凹

拐点坐标分别为$(-\sqrt{3},-\frac{\sqrt{3}}{2})$，$(0,0)$，$(\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{2})$。

三、曲线的渐近线

研究导数可以把曲线和直线(曲线的切线)联系在一起，但当我们考察曲线在无限远处与直线的关系时，就不再使用导数了，这是因为导数是用来研究曲线的局部性质的。我们用渐近线来刻画函数曲线在无限远处与直线的关系。

【定义 6】 如果动点沿某一条曲线无限远离原点时，动点到一定直线的距离趋于零，这条直线就称为该曲线的渐近线(asymptote)。

如果 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=b$，则曲线 $y=f(x)$ 有水平渐近线 $y=b$；

如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$，则曲线 $y=f(x)$ 有垂直渐近线 $x=x_0$；

如果 $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[\frac{f(x)}{x}\right]=a$，又 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-ax]=b$，则曲线 $y=f(x)$ 有一条斜渐近线 $y=ax+b\quad(a\neq0)$

例 57 讨论 $y=(2+x)e^{\frac{1}{x}}$ 的渐近线。

解： $\lim\limits_{x\to0^+}(2+x)e^{\frac{1}{x}}=+\infty$，知 $x=0$ 是 $y=(2+x)e^{\frac{1}{x}}$ 当 $x\to0^+$ 时的垂直渐近线；

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(2+x)e^{\frac{1}{x}}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+x}{x}\cdot\lim_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}}=1$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}(y-x)&=\lim_{x\to\infty}[(2+x)e^{\frac{1}{x}}-x]\\&=\lim_{x\to\infty}(2\cdot e^{\frac{1}{x}})+\lim_{x\to\infty}[x(e^{\frac{1}{x}}-1)]\\&=2+\lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}=3\end{aligned}$$

所以 $y=x+3$ 是 $y=(2+x)e^{\frac{1}{x}}$ 当 $x\to+\infty$(或 $x\to-\infty$)时的一条斜渐近线。

2.4.5 几个函数图形的描绘

我们已经学会如何利用一阶导数判断函数的升降，利用二阶导数判断函数曲线弯曲方向的方法，从以上两方面出发，我们就能够通过函数解析式求出函数的极值及拐点。有了这些知识，我们应该能够较准确地画出许多函数的大致图形。

下面我们列出描绘函数图形的一般步骤：

1° 确定函数定义域及不连续点，求出函数在 x 轴和 y 轴上的截距；

2° 求函数的一阶二阶导数及它们为 0 时的根；找出使一阶及二阶导数不存在的点；计算出上述根与点处的函数值；

3° 根据 2 中的根与点把定义域分成几个区间，列成一表；

4° 判断 $f'(x)$ 及 $f''(x)$ 的符号，由此确定函数图形的升降、凹凸、极值及拐点；

5° 确定函数的渐近线；

6° 根据表中所列函数的特殊点、升降、凹凸等有关特性，适当补充一些点，然后用描点法把这些点连接成光滑曲线。

以下我们就几个常用的医用函数进行函数图形描绘的实践。

一、正态分布(Normal distribution)曲线

该曲线是概率统计当中最重要的函数曲线，主要用于计算服从正态分布的母体落在某一区间的概率的大小。正态分布曲线又称高斯(Gauss)曲线，其表达式为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-u)^2}{2\sigma^2}}\text{，其中 } u\text{、}\sigma \text{ 为常数，}\sigma>0$$

下面我们画出它的大致图形。

(1)定义域：$(-\infty,+\infty)$；该函数无间断点，且曲线关于 $x=u$ 对称。

(2) $y'=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{-(x-u)}{\sigma^3}\cdot e^{-\frac{(x-u)^2}{2\sigma^2}}$，

$y''=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{\sigma^5}\cdot[(x-u)^2-\sigma^2]\cdot e^{\frac{(x-u)^2}{2\sigma^2}}$

令 $y'=0$，得 $x=u$；令 $y''=0$，得 $x=u\pm\sigma$。

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}y=0$，$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=0$，该曲线无垂直渐近线和斜渐近线；它有水平渐近线 $y=0$。

(4)列表讨论函数特性：

表 2-7　正态分布曲线 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-u)^2}{2\sigma^2}}$ 的曲线特性

x	$(-\infty,u-\sigma)$	$u-\sigma$	$(u-\sigma,u)$	u	$(u,u+\sigma)$	$u+\sigma$	$(u+\sigma,+\infty)$
y'	+	+	+	0	−	−	−
y''	+	0	−	−		0	+
y	↗上凹	拐点	↗上凸	极大值	↘上凸	拐点	↘上凹

(5) 根据上表可得极大值为 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$，拐点坐标为 $(u+\sigma,\frac{1}{\sqrt{2\pi e}}\cdot\frac{1}{\sigma})$ 及 $(u-\sigma,\frac{1}{\sqrt{2\pi e}}\cdot\frac{1}{\sigma})$。

我们可先画出曲线在 $x=u$ 的右半部分，左半部分可根据对称性画出，如图 2-15。

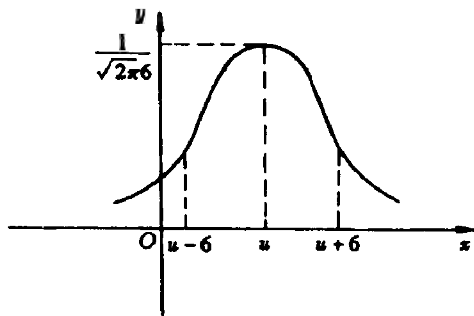


图 2-15

下面对正态分布曲线作些简单解释：

假设 u 是沈阳地区 20 岁男青年身高的平均值，又假定他们的身高服从正态分布，σ 是总体身高离均值 u 的平均差异程度。如果我们想知道身高处于 $[u-\sigma,u+\sigma]$ 之间的 20 岁男青年占该地区所有 20 岁男青年的比例的大小，则只需算出该曲线与 $x=u-\sigma$，$x=u+\sigma$ 以及 x 轴所围成的曲边梯形的面积。学完了定积分之后，我们会知道该值为 $\int_{u-\sigma}^{u+\sigma}f(x)dx$，它的值为 0.6826。

二、逻辑斯谛(Logistic)曲线

逻辑斯谛曲线代表某一生物圈内种群的生长函数，其表达式为

$$W = W_0 \frac{1+b}{1+be^{-kt}}$$

其中　W_0、k、b 均为正常数。

以下我们画出它的大致图形。

(1)定义域：$[0,+\infty]$；该函数无间断点。

(2) $W' = \dfrac{W_0(1+b)bke^{-kt}}{(1+be^{-kt})^2} > 0$

$$W'' = \frac{W_0(1+b)bk^2e^{-kt}(be^{-kt}-1)}{(1+be^{-kt})^3}$$

令 $W''=0$，得 $t=\dfrac{\ln b}{k}$，此时 W' 取极大值，亦即此时的生长速度最快。

(3) $\lim\limits_{t\to+\infty} W = (1+b)W_0$，$\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{W}{t}=0$

$W=(1+b)W_0$ 为它的水平渐近线；该曲线无垂直渐近线与斜渐近线。

(4)曲线特性如表 2-10 所示，其拐点坐标为 $\left(\dfrac{\ln b}{k},\dfrac{1}{2}(1+b)W_0\right)$。

(5)根据(1)～(4)的讨论画出函数图像如图 2-16 所示。

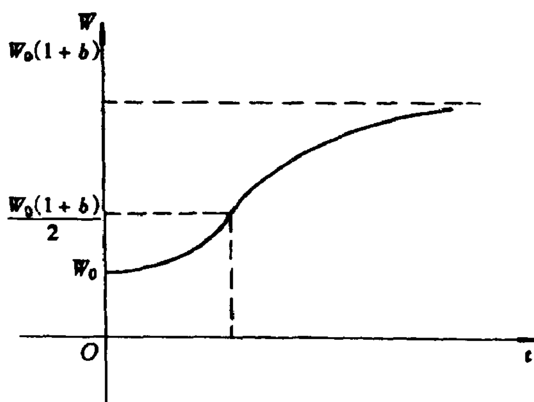


图 2-16

表 2-8　逻辑斯谛曲线的特性

t	$[0,\frac{\ln b}{k})$	$\frac{\ln b}{k}$	$(\frac{\ln b}{k},+\infty)$
W'	+	+	+
W''	+	0	−
W	↑ 上凹	拐点	↗ 上凸

三、贡珀茨(Gompertz)曲线

贡珀茨曲线用于描述肿瘤生长规律，其表达式为

$W = ae^{-be^{-kt}}$，其中 a、b、k 均为正常数。

下面我们画出它的大致图形。

(1)定义域:[0, +∞),该函数无间断点。

(2) $W' = abke^{-kt-be^{-kt}} > 0$; $W'' = -abk^2(1-be^{-kt})e^{-kt-be^{-kt}}$。

令 $W''=0$,得 $t=\frac{\ln b}{k}$,$(b>1)$,此时曲线增长速度最快。

(3) $\lim\limits_{t\to+\infty} W = a$, $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{W}{t}=0$;由此可知其水平渐近线为 $W=a$;该曲线无垂直渐近线和斜渐近线。

(4)列表讨论曲线特性如表 2-11 所示。其拐点坐标为$(\frac{\ln b}{k},\frac{a}{e})$。

(5)函数大致图像如图 2-17 所示。

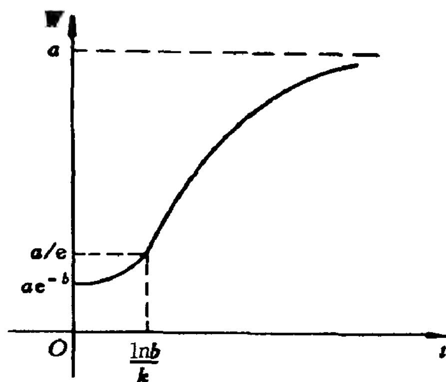


图 2-17

表 2-9　贡珀茨曲线特性

t	$[0,\frac{\ln b}{k})$	$\frac{\ln b}{k}$	$(\frac{\ln b}{k},+\infty)$
W'	+	+	+
W''	+	0	−
W	↗ 上凹	拐点	↗ 上凸

小　　结

1. 导数是微积分学最重要的基本概念之一,它以极限概念为基础,其目的是用研究直线的方法研究复杂函数的曲线特性。它的物理意义是一个变量对另一个变量的变化率;其几何意义是曲线上某点的切线斜率。函数 $y=f(x)$在点 x 的导数被定义为

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$f(x)$在 x 点的导数存在是指上式的极限存在。

2. 导数运算是以极限运算为基础,通过复合函数求导法则为过渡而逐步展开的,本章所涉及的求导法则及基本初等函数的求导公式汇集如下:

(1)四则运算求导法则

1) $(u \pm v)' = u' \pm v'$

2) $(u \cdot v)' = u'v + uv'$

3) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, $(v \neq 0)$

(2)复合函数求导法则,如果 $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$ 均可导,则复合函数 $y = f[\varphi(x)]$ 也可导,其导数为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

(3)导数的基本公式

1) $(c)' = 0$

2) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha - 1}$, α 为任意实数

3) $(\sin x)' - \cos x$

4) $(\cos x)' = -\sin x$

5) $(\mathrm{tg} x)' = \sec^2 x$

6) $(\cot x)' = -\csc^2 x$

7) $(\sec x)' = \mathrm{tg} x \cdot \sec x$

8) $(\csc x)' = -\cot x \cdot \csc x$

9) $(a^x)' = a^x \ln a$, $(a > 0, a \neq 1)$

10) $(e^x)' = e^x$

11) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$, $(a > 0, a \neq 1)$

12) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

13) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

14) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

15) $(\mathrm{arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2}$

16) $(\mathrm{arccot} x)' = -\frac{1}{1 + x^2}$

3. 微分是微积分学中又一重要的基本概念,函数 $y = f(x)$ 的微分表达式为 $dy = f'(x)dx$,它是改变量 Δy 的近似替代值,当 $|\Delta x|$ 很小时,可用 $|\Delta y| \approx |f'(x_0)(x - x_0)|$ 近似计算 x_0 附近 $x_0 + \Delta x$ 处的函数值。

4. 导数作为研究函数特性的工具,具有巨大的威力。一阶导数可用于研究函数的增减性以及函数的极值;二阶导数用于研究曲线的弯曲程度,它包括凹凸性及拐点的确定。

函数各阶导数值的存在及其绝对值的大小可用于刻画函数曲线是否弯曲以及弯曲程度的高低。

5. 由中值定理导出的洛必达法为计算极限提供了强有力的武器。

习　题

1. 按定义求下列函数在 $x = 1$ 处的导数。

(1) $f(x) = \sqrt{x}$　　(2) $f(x) = \frac{1}{x^2}$

2. 下列函数在 $x = 0$ 处是否可导? 如可导则根据导数定义求出它在 $x = 0$ 处的导数。

(1) $$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

(2) $$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

3. 根据导数定义证明函数 $y=x^{\alpha}\quad 0<\alpha<1$ 在 $x=0$ 处不可导。

4. 在抛物线 $y=x^2$ 依次取 $x_1=1, x_2=2$ 两点，过这两点作割线，试在抛物线上找到一点，使过该点的切线平行于所作的割线。

5. 对于点 $A(x_0,y_0)$ 和抛物线 $y=x^2$ 来说，当 (x_0,y_0) 满足什么条件时，过该点可作抛物线的两条切线？

6. 求下列函数的导数。

(1) $y=x^n+n^n$　　(2) $y=x+\ln x$

(3) $y=x^n\sin x+\cos x$

(4) $y=\dfrac{\mathrm{tg}x}{x^2}$　　(5) $y=\sin x\cdot\cos x\cdot\ln x$

(6) $y=\dfrac{\sec x}{1+x}$　　(7) $y=\csc x\cdot\ln x$

7. 求下列函数的导数。

(1) $y=(1+x^n)^n$　　(2) $y=x^2\mathrm{tg}3x$

(3) $y=\ln\dfrac{\sin x}{1+x^2}$　　(4) $y=\ln[\ln(2x+1)]$

(5) $y=\ln\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}$　　(6) $y=\ln^2[\ln^3 x]$

8. y 是由下列方程所确定的 x 的函数，试求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$。

(1) $x\ln y+\mathrm{tg}x=1$　　(2) $x^2+(y-1)^2=1$

9. 求下列函数的导数。

(1) $y=x^{\sin x}$　　(2) $y=x^{\mathrm{tg}x}$

(3) $y=\sqrt{\dfrac{(x+1)(x+3)}{\sin x\cdot\cos x}}$　　(4) $y=\mathrm{e}^{\mathrm{tg}x}$

(5) $y=\mathrm{e}^{x^x}$　　(6) $y=e^{\arcsin x}$

(7) $y=(\mathrm{arctg}x)^x$　　(8) $y=x\cdot\mathrm{arccot}(\ln x)$

10. 求下列函数的几阶导数。

(1) $y=5^x$　　(2) $y=a\cos bx$

(3) $y=\ln x$

11. 求下列隐函数的导数。

(1) $x^3+y^3-3axy=0$　　(2) $\sin(xy)=x+y$

(3) $y+x\mathrm{e}^{xy}=\cos y$　　(4) $\mathrm{arctg}(xy)+y=x$

12. 求下列函数的微分 $\mathrm{d}y$。

(1) $y=\mathrm{e}^{\sin x}$　　(2) $y=\arcsin(\mathrm{e}^{2x})$

(3) $y=\sin(x+\arccos x)$　　(4) $y=\mathrm{e}^{2\mathrm{arctg}x}$

13. 求 $\sqrt{5}$、$\sin31°$、$\sqrt[5]{1.001}$ 及 $\ln(1.002)$ 的近似值。

14. 证明下列不等式。

(1) $|x|\leqslant|\mathrm{tg}x|, x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$，等号只当 $x=0$ 成立

(2) $\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x, (x>0)$

(3)$e^x > 1 + x, (x \neq 0)$

15. 求下列函数极限。

(1)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}\,ax}{\sin bx}\quad (b\neq 0)$

(2)$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{\ln x}$

(3)$\lim\limits_{x\to \pi}(\pi - x)\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}$

(4)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\cos 5x)}{\ln(\cos 2x)}$

(5)$\lim\limits_{x\to +0} x^p \ln^q x, (p>0, q>0)$

(6)$\lim\limits_{x\to +0} x^{\sin x}$

(7)$\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$

(8)$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

(9)$\lim\limits_{x\to +0}(\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}$

16. 证明下列不等式。

(1)$x < \sin x < x - \frac{x^3}{6}, x<0$

(2)$\frac{1}{2^{p-1}} \leqslant x^p + (1-x)^p \leqslant 1, x\in[0,1], p>1$

17. 确定下列函数的单调区间。

(1)$y = x^3 - 6x$

(2)$y = x^4 - 2x^3$

(3)$y = x + \sin x$

(4)$y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 7$

18. 求下列函数的极值。

(1)$y = x - \ln(1+x)$

(2)$y = \sqrt{x}\ln x$

(3)$y = x + \frac{1}{x}$

(4)$y = \sin^3 x + \cos^3 x$

19. 求下列函数在所给区间内的最大值和最小值。

(1)$f(x) = x^2 - 4x + 6, x\in[-3,10]$

(2)$f(x) = \sqrt{5-4x}, x\in[-1,1]$

(3)$f(x) = |x^2 - 3x + 2|, x\in[-10,10]$

(4)$f(x) = 2^{|x-2|}, x\in[-5,5]$

20. 已知不在同一直线上的三点 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$和 $C(x_3,y_3)$;试用 x_i、y_i 来表示 ΔABC 的面积。

21. 椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b)$的切线与 x 轴 y 轴分别交于 A、B 两点,

(1)求 AB 间的最小距离。

(2)求 ΔOAB 的最小面积。

22. 试问 a、b 为何值时,点 $P(1,3)$为曲线 $y = ax^3 + bx^2$ 的拐点?

23. 证明曲线 $y = \frac{x-1}{x^2+1}$有位于同一直线上的三个拐点。

24. 肌注或口服药物后,血药浓度____时间曲线为 $C(t) = 122(e^{-0.18t} - e^{-t})$,试求出现浓度最大和最小浓度变化率的时刻。

25. 讨论下列函数的凹凸性和拐点。

(1) $y=\frac{a^2}{a^2+x^2}(a>0)$　　　(2) $y=x+\sin x$

(3) $y=\sqrt{1+x^2}$

26. 讨论下列函数的单调性、极值、凹凸性、拐点和渐近线，并画出它们的大致图形。

(1) $y=x^3-6x$　　　(2) $y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$

(3) $y=\ln\frac{1+x}{1-x}$　　　(4) $y=x+\mathrm{arctg}x$

(5) $y=\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}$

（赵会仁　赵玉荣　马建忠）

第三章　一元函数积分学

积分学分为不定积分与定积分两部分。不定积分是作为函数导数的反问题提出的，而定积分是作为微分的无限求和引进的，两者概念不相同，但在计算上却有着紧密的内在联系。本章主要研究不定积分和定积分的概念、性质，并揭示二者的联系，从而解决定积分的计算问题。本章重点讨论了不定积分的计算方法，介绍了定积分在几何、物理及医学等方面的应用，最后简单介绍了广义积分。

3.1　不定积分

一元函数的微分法是对给定的函数求出它的导数或微分，但在科学技术的许多问题中，往往需要解决与微分运算正好相反的问题，就是已知某个函数的导数或微分，而要求这个函数，这便是不定积分要解决的问题。

3.1.1　不定积分的概念

一、不定积分的定义

【定义 1】　若在某一区间上，$F'(x)=f(x)$，则在这个区间上，函数 $F(x)$ 叫做函数 $f(x)$ 的一个原函数(primitive function)。

显然，从定义知道，一个函数的原函数不仅不是唯一的，而且原函数有无穷多个。比如，$(\sin x)'=\cos x$，$\sin x$ 是 $\cos x$ 的一个原函数，而 $\sin x+C$（C 可以取任意多的常数）是 $\cos x$ 的无穷多个原函数。又如，若 $F'(x)=f(x)$，$F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，而等式

$$(F(x)+C)'=F'(x)=f(x)$$

成立，其中 C 为任意常数，则一簇曲线方程 $F(x)+C$ 是 $f(x)$ 无穷多个原函数。

既然一个函数 $f(x)$ 在一个区间有一个原函数 $F(x)$，那么就有 $f(x)$ 的无穷多个原函数存在，无穷多个原函数是否都有一致的表达式 $F(x)+C$ 呢？回答是肯定的。

【定理 1】　若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $f(x)$ 的所有原函数都可以表示成 $F(x)+C$（C 为任意常数）。

证：　由定理条件，$F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，$F(x)+C$ 显然是 $f(x)$ 的原函数；现假设 $G(x)$ 是 $f(x)$ 的任意一个原函数，只要证明 $G(x)=F(x)+C$ 即说明任意一个原函数都可表示成 $F(x)+C$ 的形式。

因为 $G(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，所以 $G'(x)=f(x)$，又因为 $F'(x)=f(x)$，故有 $F'(x)=G'(x)$，由导数运算得

$$[G(x)-F(x)]'=G'(x)-F'(x)=0$$

又由拉格朗日中值定理的推论可知

$$G(x)-F(x)=C$$

即 $G(x)=F(x)+C$,这就证明了 $f(x)$的所有原函数都可以表示成 $F(x)+C$ 的形式。

由定理 1 知,所有的原函数表达形式是一致的,即 $F'(x)=f(x)$,$F(x)+C$ 是$f(x)$的所有原函数的一般表达式,把 $F(x)+C$ 定义为不定积分。

【定义 2】 若 $F(x)$是 $f(x)$的一个原函数,则 $f(x)$的所有原函数 $F(x)+C$ 称为 $f(x)$的不定积分(indefinite integral),记为 $\int f(x)\mathrm{d}x$,即

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C \tag{3-1}$$

其中 $\int$ 称为积分号,x 称为积分变量,$f(x)$称为被积函数,$f(x)\mathrm{d}x$ 称为被积表达式,C 称为积分常数。

因此,求已知函数的不定积分,就归结为求出它的一个原函数,再加上任意常数 C。

例 1 求函数 $f(x)=3x^2$ 的不定积分。

解: 因$(x^3)'=3x^2$,所以

$$\int 3x^2\mathrm{d}x = x^3 + C$$

例 2 求函数 $f(x)=\frac{1}{x}$的不定积分。

解: 因为当 $x>0$ 时,$(\ln x)'=\frac{1}{x}$,所以,

$$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln x + C \quad (x>0)$$

当 $x<0$ 时,$-x>0$,$[\ln(-x)]'=\frac{1}{-x}\cdot(-1)=\frac{1}{x}$,所以

$$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln(-x) + C \quad (x<0)$$

合并上面两式,得到

$$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + C \quad (x\neq 0)$$

二、不定积分的几何意义

由于函数 $f(x)$的不定积分 $F(x)+C$ 中含有任意常数C,因此对于每一个给定的C,都有一个确定的原函数,在几何上,相应地就有一条确定的曲线,称为 $f(x)$的积分曲线。因为 C 可以取任意值,因此不定积分表示 $f(x)$的一簇积分曲线,即 $F(x)+C$。因为 $F'(x)=f(x)$,即可说明,在积分曲线簇的每一条曲线中,对应于同一个横坐标 $x=x_0$ 点处有相同的斜率 $f(x_0)$,所以对应于这些点处,它们的切线互相平行,任意两条曲线的纵坐标之间相差一个常数。因此,积分曲线簇 $y=F(x)+C$ 中每一条曲线都可以由曲线 $y=F(x)$沿 y 轴方向上、下移动而得到。见图 3-1。

例 3 求经过点(1,3),且其切线的斜率为 $2x$ 的曲线方程。

解: 由曲线切线斜率为 $2x$ 和不定积分定义可知,$\int 2x\mathrm{d}x = x^2 + C$

得曲线簇 $y=x^2+C$,将 $x=1$,$y=3$ 代入,得 $C=2$。所以

$$y=x^2+2$$

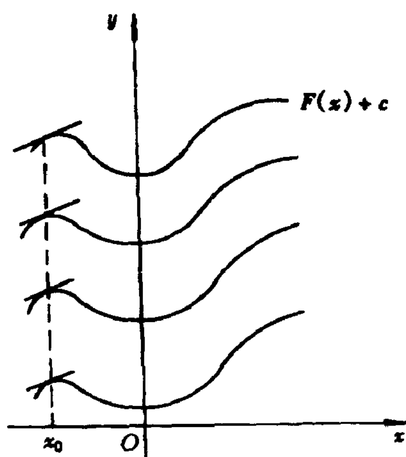


图 3-1

就是所求曲线方程。

3.1.2 不定积分的基本公式和运算法则

一、不定积分的基本公式

由不定积分的定义可知,不定积分就是微分运算的逆运算。因此,有一个导数或微分公式,就对应地有一个不定积分公式。例如,因为$\left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)'=x^{\alpha}$,所以$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$是 x^{α} 的一个原函数,于是由不定积分定义有

$$\int x^{\alpha}\mathrm{d}x=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C \qquad (\alpha\neq-1)$$

类似地可以得到其他基本积分公式:

1. $\int k\mathrm{d}x=kx+C$ (k 是常数,$k\neq0$)
2. $\int x^{\alpha}\mathrm{d}x=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C \qquad (\alpha\neq-1)$
3. $\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|+C \qquad (x\neq0)$
4. $\int \sin x\mathrm{d}x=-\cos x+C$
5. $\int \cos x\mathrm{d}x=\sin x+C$
6. $\int a^{x}\mathrm{d}x=\frac{a^{x}}{\ln a}+C \qquad (a\neq1,a>0)$
7. $\int \mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{x}+C$
8. $\int \csc^{2}x\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\sin^{2}x}\mathrm{d}x=-\cot x+C$
9. $\int \sec^{2}x\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\cos^{2}x}\mathrm{d}x=\mathrm{tg}x+C$
10. $\int \frac{1}{1+x^{2}}\mathrm{d}x=\mathrm{arctg}x+C$
11. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}\mathrm{d}x=\arcsin x+C$
12. $\int \sec x\,\mathrm{tg}x\,\mathrm{d}x=\sec x+C$
13. $\int \csc x\cot x\,\mathrm{d}x=-\csc x+C$

关于不定积分,还有如下等式成立:

1. $\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]'=f(x)$ 或 $\mathrm{d}\int f(x)\mathrm{d}x=f(x)\mathrm{d}x$ (3-2)
2. $\int F'(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$ 或 $\int \mathrm{d}F(x)=F(x)+C$ (3-3)

由基本积分公式,可算如下不定积分:

$$\int \sqrt{x}\mathrm{d}x = \int x^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x = \frac{x^{1+\frac{1}{2}}}{1+\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$$

二、不定积分的运算法则

由微分运算法则,相应地就可以得到以下的不定积分的运算法则:

1. 不为零的常数因子,可移动到积分号前

$$\int af(x)\mathrm{d}x = a\int f(x)\mathrm{d}x \quad (a \neq 0) \tag{3-4}$$

这是因为上式右端的导数

$$[a\int f(x)\mathrm{d}x]' = a[\int f(x)\mathrm{d}x]' = af(x)$$

恰好是左端的被积函数。另一方面,对$\int af(x)\mathrm{d}x$求导也是$af(x)$,在不考虑积分常数的条件下,有$a\int f(x)\mathrm{d}x = \int af(x)\mathrm{d}x$。

2. 两个函数的代数和的积分等于函数积分的代数和

$$\int[f(x) \pm g(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x \pm \int g(x)\mathrm{d}x \tag{3 5}$$

要证明这个等式,只需验证等式右端的导数等于左端的被积函数。读者不难作出证明。

这个公式可以推广到任意有限多个函数的代数和的情况。

例 4 求$\int(\sin x + \frac{2}{1+x^2} + \mathrm{e}^x)\mathrm{d}x$。

解:

$$\begin{aligned}
&\int(\sin x + \frac{2}{1+x^2} + \mathrm{e}^x)\mathrm{d}x \\
&= \int \sin x\mathrm{d}x + 2\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x + \int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x \\
&= -\cos x + 2\mathrm{arctg}x + \mathrm{e}^x + C
\end{aligned}$$

例 5 求不定积分$\int \frac{x^4}{1+x^2}\mathrm{d}x$。

解:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^4}{1+x^2}\mathrm{d}x &= \int \frac{x^4-1+1}{1+x^2}\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{x^4-1}{1+x^2}\mathrm{d}x + \int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{(x^2+1)(x^2-1)}{1+x^2}\mathrm{d}x + \int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x \\
&= \int (x^2-1)\mathrm{d}x + \int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x \\
&= \int x^2\mathrm{d}x - \int \mathrm{d}x + \int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x \\
&= \frac{x^{2+1}}{2+1} - x + \mathrm{arctg}x + C = \frac{1}{3}x^3 - x + \mathrm{arctg}x + C
\end{aligned}$$

例 6 求不定积分$\int \cos^2\frac{x}{2}\mathrm{d}x$。

解: $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx = \int \frac{1+\cos x}{2} dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos x dx$

$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sin x + C$

例 7 求不定积分 $\int tg^2 x dx$。

解: $\int tg^2 x dx = \int (\sec^2 x - 1) dx = \int \sec^2 x dx - \int dx$

$= tg x - x + C$

3.2 不定积分的计算

利用基本积分公式及不定积分的性质直接计算不定积分,有时很困难,因此,需要引进更多的方法和技巧,下面介绍不定积分的两大积分方法——换元积分法与分部积分法。

3.2.1 换元积分法

一、第一类换元积分法(凑微分法)

有一些不定积分,将积分变量进行一定的变换后,积分表达式由于引进中间变量而变为新的形式,而新的积分表达式和新的积分变量可直接由基本积分公式求出不定积分来。例如

$$\int e^{4x} dx = \int \frac{1}{4} e^{4x} d(4x) = \frac{1}{4}\int e^{4x} d(4x)$$

观察上式最后一个等式可以看出,若令 $u = 4x$,把 $4x$ 看成一个整体(新的积分变量),这个积分可直接利用基本积分公式算出来,即可去掉积分号,然后再代回原来的变量 x,就得到不定积分的结果:

$$\int e^{4x} dx = \frac{1}{4}\int e^{4x} d(4x) = \frac{1}{4}\int e^{u} du = \frac{1}{4} e^{u} + C = \frac{1}{4} e^{4x} + C$$

又如:

$$\int 2\cos 2x dx = \int \cos 2x d(2x) \xlongequal{u=2x} \int \cos u du$$

$$= \sin u + C \xlongequal{u=2x} \sin 2x + C$$

可以给出一般形式的计算过程:

$$\int f[\Phi(x)]\Phi'(x) dx = \int f[\Phi(x)] d\Phi(x) \xlongequal{\Phi(x)=u} \int f(u) du$$

$$= F(u) + C \xlongequal{u=\Phi(x)} F[\Phi(x)] + C \tag{3-6}$$

这种计算过程,称为第一类换元积分法或凑微分法(the first integration by substitution)。

在实际计算中,把式(3-6)简化成式(3-7),直接用式(3-7)进行凑微运算。

$$\int f[\Phi(x)] \cdot \Phi'(x) dx = \int f[\Phi(x)] d\Phi(x) = F[\Phi(x)] + C \tag{3-7}$$

例 8 求不定积分 $\int \sqrt{2x+1} dx$。

解：$\int\sqrt{2x+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\sqrt{2x+1}\mathrm{d}(2x+1)=\frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}+C$

将例 8 推广到一般幂函数的情形，显然有

$$\int(ax+b)^m\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\int(ax+b)^m\mathrm{d}(ax+b)$$

$$=\frac{(ax+b)^{m+1}}{a(m+1)}+C\qquad(m\neq-1)$$

若 $m=-1$ 时，$\int\frac{\mathrm{d}x}{ax+b}=\frac{1}{a}\int\frac{\mathrm{d}(ax+b)}{ax+b}=\frac{1}{a}\ln|ax+b|+C$

例 9 求不定积分 $\int\mathrm{tg}x\mathrm{d}x$。

解：$\int\mathrm{tg}x\mathrm{d}x=\int\frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x=-\int\frac{\mathrm{d}\cos x}{\cos x}=-\ln|\cos x|+C$

读者不难求得

$$\int\cot x\mathrm{d}x=\ln|\sin x|+C$$

例 10 求不定积分 $\int\frac{\mathrm{d}x}{a^2-x^2}$。

解：

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\int(\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a-x})\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2a}\int\frac{\mathrm{d}x}{a+x}+\frac{1}{2a}\int\frac{\mathrm{d}x}{a-x}=\frac{1}{2a}\ln|a+x|-\frac{1}{2a}\ln|a-x|+C$$

$$=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+C\qquad(a>0)$$

例 11 求不定积分 $\int\csc x\mathrm{d}x$。

解：

$$\int\csc x\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin x}=\int\frac{\sin x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x=-\int\frac{\mathrm{d}\cos x}{1-\cos^2 x}$$

$$=\int\frac{1}{\cos^2 x-1}\mathrm{d}\cos x$$

$$=\frac{1}{2}\int(\frac{1}{\cos x-1}-\frac{1}{\cos x+1})\mathrm{d}\cos x$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right|+C$$

$$=\ln\left|\frac{1-\cos x}{\sin x}\right|+C=\ln|\csc x-\cot x|+C$$

由于 $\cos x=\sin(x+\frac{\pi}{2})$，再利用例 11 的方法和结果，下述积分可得

$$\int\sec x\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos x}=\int\frac{\mathrm{d}(x+\frac{\pi}{2})}{\sin(x+\frac{\pi}{2})}$$

$$=\ln\left|\csc(x+\frac{\pi}{2})-\cot(x+\frac{\pi}{2})\right|+C$$

$$=\ln|\sec x+\mathrm{tg}x|+C$$

二、第二类换元积分法

第一类换元积分法，它是利用凑微分的方法，把一个较复杂的积分化成便于利用基本

积分公式的形式，但是，有时不易找出凑微分式，却可以设法作一个代换，$x=\varphi(t)$，积分 $\int f(x)\mathrm{d}x=\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t$，此时便可利用基本积分公式求解，因此有第二类换元积分法(the second integration by substitution)。定理形式叙述如下：

【定理 2】 设 $f(x)$ 连续，$x=\varphi(t)$ 是单调可导的连续函数，且其导数 $\varphi'(t)\neq 0$，$x=\varphi(t)$ 的反函数 $t=\varphi^{-1}(x)$ 存在且可导，并且

$$\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t = F(t)+C \tag{3-8}$$

则

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F[\varphi^{-1}(x)]+C \tag{3-9}$$

证： 将式(3-9)右端求导，并同时注意到式(3-8)，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[F[\varphi^{-1}(x)]+C]=F'(t)\cdot[\varphi^{-1}(x)]'$$

$$=f[\varphi(t)]\varphi'(t)\cdot\frac{1}{\varphi'(t)}=f(x)$$

即 $F[\varphi^{-1}(x)]+C$ 的导数等于 $f(x)$，由不定积分定义即证此定理。

将式(3-8)和式(3-9)联系起来，可将第二类换元积分写成便于应用的形式：

$$\int f(x)\mathrm{d}x \xlongequal{x=\varphi(t)} \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t = F(t)+C$$

$$\xlongequal{t=\varphi^{-1}(x)} F[\varphi^{-1}(x)]+C \tag{3-10}$$

在定理 2 中，做变换 $x=\varphi(t)$ 应满足在某个区间上是单调可导函数，保证了反函数 $t=\varphi^{-1}(x)$ 存在且单调，所以在应用时请注意，有唯一的 t 就有唯一的 x，反之亦然，而且使 x 满足被积函数 $f(x)$ 所要求的 x 取值范围。例如，做变换 $x=t^2$，反函数 $t=\pm\sqrt{x}$，为了使 x 满足不定积分中的被积函数 $f(x)$ 所要求的 x 取值范围以及保证 x 与 t 的一一对应的关系，去掉"±"号，只取变换 $t=\sqrt{x}$，一般结果仍然正确。本书对不定积分的类似情况，不再重复讨论。

例 12 求不定积分 $\int\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x \quad (a>0)$。

解： 设 $x=a\sin t$，$\mathrm{d}x=a\cos t\mathrm{d}t$，$(-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2})$

$$\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}=a\cos t$$

于是

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x = \int a\cos t\cdot a\cos t\mathrm{d}t=a^2\int\cos^2 t\mathrm{d}t$$

$$=a^2\int\frac{1+\cos 2t}{2}\mathrm{d}t=\frac{a^2}{2}[t+\frac{1}{2}\sin 2t]+C$$

$$=\frac{a^2}{2}[t+\sin t\cos t]+C$$

$$=\frac{a^2}{2}[\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{a}\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}]+C$$

$$=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C$$

例 13 求不定积分 $\int\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\mathrm{d}x \quad (a>0)$。

解： 设 $x = a\,\mathrm{tg}t$，则 $\mathrm{d}x = a\sec^2 t\,\mathrm{d}t$

$$\sqrt{x^2+a^2} = \sqrt{a^2\mathrm{tg}^2 t + a^2} = a\sec t$$

于是
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} = \int \frac{a\sec^2 t}{a\sec t}\mathrm{d}t = \int \sec t\,\mathrm{d}t = \ln|\sec t + \mathrm{tg}t| + C_1$$

$$= \ln\left|\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 t} + \mathrm{tg}t\right| + C_1 = \ln\left|\sqrt{1+(\frac{x}{a})^2} + \frac{x}{a}\right| + C_1$$

$$= \ln\left|x + \sqrt{x^2+a^2}\right| + C$$

其中 $C = C_1 - \ln a$

例 14 求不定积分 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}$ $(a>0)$。

解： 设 $x = a\sec t$，则 $\mathrm{d}x = a\sec t\cdot\mathrm{tg}t\,\mathrm{d}t$

$$\sqrt{x^2-a^2} = \sqrt{a^2\sec^2 t - a^2} = a\,\mathrm{tg}t$$

于是
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} - \int \frac{1}{a\,\mathrm{tg}t}a\cdot\sec t\cdot\mathrm{tg}t\,\mathrm{d}t = \int \sec t\,\mathrm{d}t$$

$$= \ln|\sec t + \mathrm{tg}t| + C_1 = \ln\left|\sec t + \sqrt{\sec^2 t - 1}\right| + C_1$$

$$= \ln\left|\frac{x}{a} + \sqrt{(\frac{x}{a})^2 - 1}\right| + C_1 = \ln\left|x + \sqrt{x^2-a^2}\right| + C$$

其中 $C = C_1 - \ln a$

合并例 13、例 14，得

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C \qquad (a>0)$$

例 15 求不定积分 $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x+2}}$。

解： 设 $t = \sqrt{x+2}$，则 $x = t^2 - 2$，$\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$

于是
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x+2}} = \int \frac{2t\,\mathrm{d}t}{(t^2-1)t} = \int \frac{2\mathrm{d}t}{t^2-1} = \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C$$

$$= \ln\left|\frac{\sqrt{x+2}-1}{\sqrt{x+2}+1}\right| + C$$

当被积函数含有 n 次根式 $\sqrt[n]{ax+b}$ 时，只需做代换 $ax+b=t^n$，就可将根号去掉。不定积分就变成容易的积分了。

3.2.2 分部积分法

如果 $u=u(x)$ 与 $v=v(x)$ 都有连续的导数，则由函数乘积的微分公式 $d(uv) = v\mathrm{d}u + u\mathrm{d}v$ 移项得

$$u\,\mathrm{d}v = \mathrm{d}(uv) - v\,\mathrm{d}u$$

所以有

$$\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u \text{ 或} \int u\,\mathrm{d}v = uv - \int vu'\,\mathrm{d}x \qquad (3\text{-}11)$$

这个公式叫作分部积分（integration by parts）公式，当积分 $\int u\,\mathrm{d}v$ 不易计算，而积分

$\int v\mathrm{d}u$ 比较容易计算时,就可以使用这个公式。

例 16 求不定积分 $\int x\cos x\mathrm{d}x$。

解: 设 $u = x, \mathrm{d}v = \cos x\mathrm{d}x$

则 $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x, v = \sin x$

于是应用分部积分公式,得

$$\int x\cos x\mathrm{d}x = x\sin x - \int \sin x\mathrm{d}x = x\sin x + \cos x + C$$

在计算方法熟练后,分部积分法的替换过程可以省略。

例 17 求不定积分 $\int x^2\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$ 。

解: $\int x^2\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \int x^2\mathrm{d}\mathrm{e}^x = x^2\mathrm{e}^x - 2\int x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$

$$= x^2\mathrm{e}^x - 2x\mathrm{e}^x + 2\mathrm{e}^x + C = \mathrm{e}^x(x^2 - 2x + 2) + C$$

例 18 求不定积分 $\int \mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x$。

解: $\int \mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^x\mathrm{d}(-\cos x) = -\mathrm{e}^x\cos x + \int \mathrm{e}^x\cos x\mathrm{d}x$

$$= -\mathrm{e}^x\cos x + \int \mathrm{e}^x\mathrm{d}\ \sin x$$

$$= -\mathrm{e}^x\cos x + \mathrm{e}^x\sin x - \int \mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x$$

即 $$\int \mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^x\cos x + \mathrm{e}^x\sin x - \int \mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x$$

将上式整理再添上任意常数,得

$$\int \mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(\sin x - \cos x)\mathrm{e}^x + C$$

例 19 求不定积分 $\int x\mathrm{arc\ tg}x\mathrm{d}x$。

解: $\int x\mathrm{arc\ tg}x\mathrm{d}x = \int \mathrm{arc\ tg}x\mathrm{d}(\frac{x^2}{2})$

$$= \frac{1}{2}x^2\mathrm{arc\ tg}x - \frac{1}{2}\int x^2\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}x^2\mathrm{arc\ tg}x - \frac{1}{2}\int \frac{1+x^2-1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}x^2\mathrm{arc\ tg}x - \frac{1}{2}\int (1 - \frac{1}{1+x^2})\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}x^2\mathrm{arc\ tg}x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\mathrm{arc\ tg}x + C$$

$$= \frac{1}{2}(1 + x^2)\mathrm{arc\ tg}x - \frac{x}{2} + C$$

例 20 求不定积分 $\int \ln x\mathrm{d}x$。

解: $\int \ln x\mathrm{d}x = x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x = x\ln x - x + C$

例 21 求不定积分 $\int \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$。

解： 设 $t=\sqrt{x}$，$x=t^2$

$$\int e^{\sqrt{x}}dx=\int e^t dt^2=2\int te^t dt=2\int t de^t$$

$$=2te^t-2\int e^t dt=2e^t(t-1)+C=2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)+C$$

总结以上例子，分部积分法主要解决被积函数是两类不同类型的函数乘积形式的一类积分问题，例如这些形式：

$$\int P(x)e^{ax}dx;\int P(x)\cos mx dx;\int P(x)\sin mx dx;$$

$$\int P(x)\ln^m x dx;\int \sin^m x e^{ax} d;\cdots\cdots$$

其中 m 为正整数，a 为常数，$P(x)$为多项式。另外，正确选取 $u(x)$，$v(x)$，会使不定积分$\int v(x)du(x)=\int v(x)u'(x)dx$ 变得更加简单易求，这一点留给读者积分时去探索和总结。

3.2.3 有理函数积分简介

有理函数总可以写成两个多项式的比

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_{m-1}x+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_{n-1}x+b_n}$$

其中 n 为正整数，m 为非负整数，$a_0\neq0$，$b_0\neq0$，设分子与分母之间没有公因子，当 $n>m$ 时，叫做真分式；当 $m\geqslant n$ 时，叫做假分式，假分式可以用除法把它化为一个多项式与一个真分式之和。

多项式可以很容易地逐项积分，因此只需要讨论真分式的积分，一般来讲，先将有理真分式化成部分分式，再求部分分式的积分。

例 22： 将$\frac{2x-1}{x^2-5x+6}$分解成部分分式。

解： 由于真分式

$$\frac{2x-1}{x^2-5x+6}=\frac{2x-1}{(x-3)(x-2)}$$

可以设

$$\frac{2x-1}{x^2-5x+6}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-2}$$

将上式右端通分后，上式两端再同乘以$(x-3)(x-2)$，消去分母，可得

$$2x-1=A(x-2)+B(x-3)$$

整理后有 $2x-1=(A+B)x-(2A+3B)$，再比较等式两端同次项系数，得方程组

$$\begin{cases}A+B=2\\2A+3B=1\end{cases}$$

解方程组，$A=5$，$B=-3$，因此部分分式为

$$\frac{2x-1}{x^2-5x+6}=\frac{5}{x-3}-\frac{3}{x-2}$$

例 23 将$(x^2+2x-1)/(x-1)(x^2-x+1)$化成部分分式。

解： 设

$$\frac{x^2+2x-1}{(x-1)(x^2-x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}$$

等式右端通分后,再消去分母得

$$\begin{aligned}x^2+2x-1&=A(x^2-x+1)+(Bx+C)(x-1)\\&=(A+B)x^2+(C-B-A)x+A-C\end{aligned}$$

由$\begin{cases}A+B=1\\C-B-A=2\\A-C=-1\end{cases}$ 得$\begin{cases}A=2\\B=-1\\C=3\end{cases}$

因此 $\frac{x^2+2x-1}{(x-1)(x^2-x+1)}=\frac{2}{x-1}-\frac{x-3}{x^2-x+1}$

例 24 求 $\int\frac{2x-1}{x^2-5x+6}\mathrm{d}x$。

解： 利用例 22 的结果

$$\int\frac{2x-1}{x^2-5x+6}\mathrm{d}x=\int\left(\frac{5}{x-3}-\frac{3}{x-2}\right)\mathrm{d}x$$

$$=5\ln|x-3|-3\ln|x-2|+C=\ln\left|\frac{(x-3)^5}{(x-2)^3}\right|+C$$

例 25 求$\int\frac{x^2+2x-1}{(x-1)(x^2-x+1)}\mathrm{d}x$。

解： 利用例 23 的结果

$$\int\frac{x^2+2x-1}{(x-1)(x^2-x+1)}\mathrm{d}x=\int\left(\frac{2}{x-1}-\frac{x-3}{x^2-x+1}\right)\mathrm{d}x$$

$$=2\int\frac{\mathrm{d}x}{x-1}-\int\frac{x-3}{x^2-x+1}\mathrm{d}x$$

$$=2\int\frac{1}{x-1}\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\frac{(2x-1)-5}{x^2-x+1}\mathrm{d}x$$

$$=2\ln|x-1|-\frac{1}{2}\left(\int\frac{\mathrm{d}(x^2-x+1)}{x^2-x+1}-5\int\frac{1}{x^2-x+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}\mathrm{d}x\right)$$

$$=2\ln|x-1|-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x^2-x+1)}{x^2-x+1}+\frac{5}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x-\frac{1}{2})}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$$

$$=2\ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln|x^2-x+1|+\frac{5}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\left(\frac{x-\frac{1}{2}}{\sqrt{3/2}}\right)+C$$

$$=\ln\left|\frac{(x-1)^2}{\sqrt{x^2-x+1}}\right|+\frac{5}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+C$$

例 26 求 $\int\frac{1}{x^2(x^2-x+1)}\mathrm{d}x$。

解： 设 $\frac{1}{x^2(x^2-x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2-x+1}$

等式两边同乘以 $x^2(x^2-x+1)$,用待定系数法得 $A=1$, $B=1$, $C=-1$, $D=0$,于是

$$\int \frac{1}{x^2(x^2-x+1)}dx = \int \frac{1}{x}dx + \int \frac{1}{x^2}dx - \int \frac{x}{x^2-x+1}dx$$

等式右端第三个积分为

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{x^2-x+1}dx &= \frac{1}{2}\int \frac{(2x-1+1)}{x^2-x+1}dx \\ &= \frac{1}{2}\left[\int \frac{d(x^2-x+1)}{x^2-x+1} + \int \frac{d(x-\frac{1}{2})}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\right] \\ &= \frac{1}{2}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}) + C\end{aligned}$$

故

$$\int \frac{dx}{x^2(x^2-x+1)} = \ln|x| - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\ln(x^2-x+1) - \frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{arctg}(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}) + C$$

对于有理函数积分，先将被积函数化成一个多项式加上一个真分式，对真分式先将分母分解成一次与二次因式乘积形式，然后用待定系数法将真分式变成部分分式，最后部分分式和一个多项式就容易积分了。

3.2.4 积分表的使用

一般的积分表都是按照被积函数的类型进行分类的，所以求不定积分时，首先找出被积函数所属的类型，然后在积分表中查出相应的公式。有时，还需要经过适当的变换，把被积函数化成积分表中所列出的形式，然后查表。积分表可看附录Ⅰ。

使用积分表求不定积分的做法请参考如下 2 例。

例 27 求 $\int \frac{dx}{x(2+5x)^2}$。

解： 被积函数含 $a+bx$，与附录Ⅰ公式 27 相同，其中 $a=2, b=5$，于是

$$\int \frac{dx}{x(2+5x)^2} = \frac{1}{2(2+5x)} - \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+5x}{x}\right| + C$$

例 28 求(1) $\int \frac{dx}{x^2+2x+3}$；　(2) $\int \frac{1-x}{x^2+9x^3}dx$。

解： (1)被积函数含有 $a+bx+x^2$ 与附录Ⅰ公式 45 相同，其中 $a=3, b=2, c=1$，$b^2-4ac=4-4\cdot3\cdot1=-8<0$，于是用公式 45 得

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2+2x+3}dx &= \frac{2}{\sqrt{4\cdot3\cdot1-4}}\mathrm{arc\ tg}(\frac{2\cdot1\cdot x+2}{\sqrt{4\cdot3\cdot1-4}}) + C \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arc\ tg}(\frac{x+1}{\sqrt{2}}) + C\end{aligned}$$

(2)因为　$\frac{1-x}{x^2+9x^3} = \frac{1}{x^2+9x^3} - \frac{1}{x+9x^2}\int \frac{1-x}{x^2+9x^3}dx$

$$= \int \frac{1}{x^2+9x^3}dx - \int \frac{1}{x+9x^2}dx$$

上式右边的第一个积分应用附录Ⅰ公式 26，其中 $a=1, b=9$；第二积分应用附录Ⅰ公式 25，其中 $a=1$，$b=9$，因此有

$$\int \frac{1-x}{x^2+9x^3}\mathrm{d}x = -\frac{1}{x}+9\ln\left|\frac{1+9x}{x}\right| - \ln\left|\frac{1+9x}{x}\right| + C$$

$$= -\frac{1}{x}+8\ln\left|\frac{1+9x}{x}\right| + C$$

最后，我们指出，积分运算与微分运算还有一个很不相同的地方，即任何一个初等函数的导数都可以根据基本导数公式和微分运算法可求出来，并且仍然是初等函数。但是，有许多初等函数却"积不出来"，即这些函数的原函数存在，但这个原函数不能用初等函数来表示，最简单的一些例子如

$$\int \cos(x^2)\mathrm{d}x, \quad \int \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x, \quad \int \frac{1}{\ln x}\mathrm{d}x, \quad \int \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$$

就是如此。

3.3 定积分

在 3.2 节中介绍的不定积分的性质和计算的基础上，我们引入定积分。

3.3.1 定积分的概念

我们先介绍曲边梯形的概念，然后由求曲边梯形面积和变速直线运动的路程入手，引出定积分的概念。

一、曲边梯形的面积

设 $y=f(x)$在区间$[a,b]$上连续，且 $f(a)\geqslant 0$，则由直线 $x=a$，$x=b$，Ox 轴及曲线

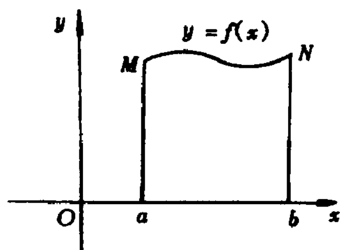


图 3-2

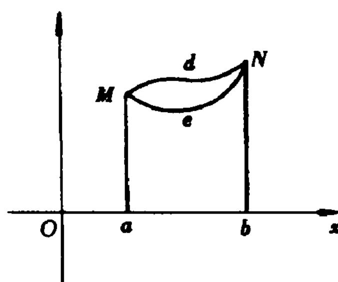


图 3-3

$y=f(x)$所围成的图形 $aMNb$ 称做曲边梯形(curvilinear trapezoid)(如图 3-2)。

不难看出，任意曲线围成的平面图形的面积都由几个曲边梯形面积的代数和构成。如图 3-3 中 $MdNeM$ 的面积可由$aMdNb$ 和$aMeNb$ 面积之差求得。因此，我们只要会求曲边梯形面积，就会求任意曲线围成的平面图形的面积。下面我们专门讨论如何计算图 3-2 中曲边梯形 $aMNb$ 的面积A。

如图 3-4，先把曲边梯形的底边所在区间$[a,b]$用分点 $x_0=a,x_1,x_2,\cdots,x_{i-1},x_i,\cdots,x_n=b$ 分成为n 个小区间$[x_0,x_1],[x_1,x_2],\cdots,[x_{i-1},x_i],\cdots,[x_{n-1},x_n]$，每个小区间长度用 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}, i=1,2,\cdots,n$；并在各分点作 x 轴的垂线，这样就把原来的曲边梯形分成 n 个小曲边梯形，n 个小曲边梯面积依次记作 $\Delta A_i, i=1,2,\cdots,n$。

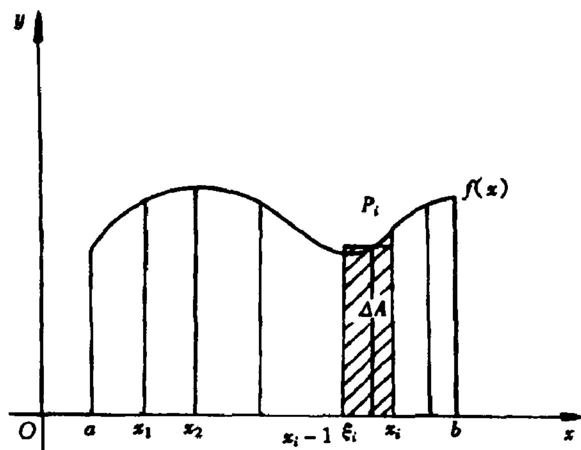


图 3-4

在每一个小区间$[x_{i-1},x_i](i-1,2,\cdots,n)$上任取一点$\xi_i$，即$x_{i-1}\leqslant\xi_i\leqslant x_i$，在点$\xi_i$引$x$轴的垂线交曲边$y=f(x)$于点$P_i$。显然点$P_i$的纵坐标是$f(\xi_i)$。过$P_i$作平行于$x$轴的直线与纵线$x=x_{i-1}$及$x=x_i$相交，便成一个小矩形，如图中画有斜线的部分。这个小矩形的面积$f(\xi_i)\Delta x_i(\Delta x_i=x_i-x_{i-1})$与同底边的小曲边梯形的面积相似，即$\Delta A_i\approx f(\xi_i)\Delta x_i\quad(i=1,2,\cdots,n)$

把n个小矩形面积作和就是曲边梯形面积的近似值，即

$$A=\sum_{i-1}^{n}\Delta A_i\approx\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$$

我们观察这个近似值的变化规律。当n愈大，即每个小区间的长度Δx_i愈小时，小矩形面积就愈接近于小曲边梯形的面积。如果使n无限增大，即$n\to\infty$，使所有的Δx_i都趋向零，即令$\lambda=\max\{\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_n\}\to0$，无限个小矩形面积的和$\sum_{i\ 1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$转化为曲边梯形面积的精确值。即

$$A=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i\tag{3-12}$$

二、变速直线运动的路程

设某物体做直线运动，已知速度$v=v(t)$是时间间隔$[T_1,T_2]$上的一个连续函数，且$v(t)\geqslant0$，要计算在这段时间内物体所走的路程s。

与前面曲边梯形的面积的求法类似，仍采取分割、近似、作和、取极限$(\lambda\to0)$的四步骤。

先用分点$T_1=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_{i-1}<t_i<\cdots<t_{n-1}<t_n=T_2$，把时间间隔$[T_1,T_2]$分成$n$个时间间隔$[t_0,t_1],[t_1,t_2],\cdots,[t_{i-1},t_i],\cdots,[t_{n-1},t_n]$。每一小段上时间间隔为$\Delta t_i=t_i-t_{i-1}(i=1,2,\cdots,n)$。相应地，在每一小段时间上物体所经过的路程为$\Delta s_i(i=1,2,\cdots n)$。在时间间隔$[t_{i-1},t_i]$上任取一个时刻$\tau_i(t_{i-1}\leqslant\tau_i\leqslant t_i)$，以$\tau_i$时的速

度 $v(\tau_i)$ 近似代替 $[t_{i-1},t_i]$ 上各个时刻的速度，得到 $[t_{i-1},t_i]$ 上的路程 Δs_i 的近似值，即 $\Delta s_i \approx v(\tau_i)\Delta t_i (i=1,2,\cdots,n)$。于是所求变速直线运动的路程 s 近似等于 n 段各部分路程的近似值之和即

$$s \approx \sum_{i=1}^{n} v(\tau_i)\Delta t_i$$

近似值的变化规律仍是 Δt_i 越小，和式越接近精确值，令 $\lambda = \max\{\Delta t_i, \Delta t_2, \cdots, \Delta t_n\}$，当 $\lambda \to 0$ 时，所有小段时间间隔趋于零，上述和式的极限就做为变速直线运动的物体在 $[T_1, T_2]$ 段上所经过路程 s 的精确值。即

$$s = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} v(\tau_i)\Delta t_i \tag{3-13}$$

上述做法仅研究了一个数学问题，一个物理问题，虽然实际问题不一样，但是数学实质是一样的，即均可归结成一种和式的极限。以后我们将知道，还有许多实际问题最终都要落实到和式的极限上，将这种特定结构的和式的极限定义成定积分。

三、定积分的定义

【定义 3】 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有界，用分点 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{i-1}<x_i<\cdots<x_n=b$。将区间 $[a,b]$ 任意分成 n 个小区间 $[x_{i-1},x_i](i=1,\cdots,n)$，每个小区间的长度为 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}(i=1,2,\cdots,n)$，在每个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上任取一点 ξ_i $(x_{i-1}\leqslant \xi_i \leqslant x_i)$，取函数值 $f(\xi_i)$ 与小区间长度 Δx_i 作乘积，$f(\xi_i)\Delta x_i (i=1,2,\cdots,n)$，并作和式

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = f(\xi_i)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \cdots + f(\xi_n)\Delta x_n$$

令 $\lambda = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta x_i\}$，若当 $\lambda \to 0$ 时，上述和式的极限存在，极限值不依赖对 $[a,b]$ 的取法，也不依赖 ξ_i 的取法，则称函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积(integrable)，并称这个极限值为函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的定积分(definite integral)，记作

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \tag{3-14}$$

其中函数 $f(x)$ 叫做被积函数，$f(x)\mathrm{d}x$ 叫做被积表达式，x 叫积分变量，a，b 分别叫做积分的下限(lower limit)和上限(upper limit)，区间 $[a,b]$ 叫做积分区间，并把 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 读作函数 $f(x)$ 从 a 到 b 的定积分。

根据定积分定义，曲边梯形面积

$$A = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta \cdot x_i = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

变速直线运动的路程

$$s = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i-1}^{n} v(\tau_i)\Delta t_i = \int_{T_1}^{T_2} v(t)\ \mathrm{d}t$$

关于定积分定义，有几点注明：

(1)定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 是一个和式的极限，是唯一的一个数，它只与被积函数和积分

上、下限有关，与积分变量无关。即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\mathrm{d}u$$

(2)为了定积分定义的完整性，规定：

$$\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0, \qquad \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$$

(3)可积性：被积函数在积分区间有界是可积的必要条件，否则若无界，取一点 ξ_i，当 $\lim\limits_{x\to\xi_i} f(x) = +\infty$ 时，显然和式 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 成为无限大，积分就不存在了。而有限区间上的连续函数定积分一定存在。连续函数是定积分存在的充分条件，而实际生活中，大多数都是连续函数，可积性是无问题的。关于有限区间上具有有限个间断点的有界函数也是可积的，这里就不深入讨论了。

(4)定积分的几何意义

当 $f(x)>0$ 时，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 表示由 $y=f(x), x=a, x=b$ 及 x 轴围成曲边梯形的面积。

当 $f(x)<0$ 时，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 是一个负数，其绝对值等于 $y=f(x), x=a, x=b$ 及 x 轴围成的曲边梯形的面积。

在一般情况下，定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的几何意义为：它是介于 x 轴，函数 $f(x)$ 曲线及直线 $x=a, x=b$ 之间的各部分面积的代数和。

3.3.2 定积分的性质

根据定积分的定义、极限运算法则及连续函数性质可得定积分如下的一些性质：

性质 1 若函数 $f_1(x), f_2(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积，则 $f_1(x) \pm f_2(x)$ 在 $[a,b]$ 上也可积，且

$$\int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x)]\mathrm{d}x = \int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x \pm \int_a^b f_2(x)\mathrm{d}x \tag{3-15}$$

证：

$$\begin{aligned}
&\int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x)]\mathrm{d}x \\
&= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i-1}^{n} [f_1(x) \pm f_2(x)]\Delta x_i \\
&= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f_2(x)\Delta x_i \pm \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f_2(x)\Delta x_i \\
&= \int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x + \int_a^b f_2(x)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

性质 2 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则 $cf(x)$ 在 $[a,b]$ 上也可积，且

$$\int_a^b cf(x)\mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \tag{3-16}$$

证法与性质 1 相同，略。

性质 3 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，且 $a<c<b$ 则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x \tag{3-17}$$

证： 因为 $f(x)$在$[a,b]$上可积，所以不论把$[a,b]$怎样分，积分和的极限总是存在的，因此在分区间$[a,b]$时，总可命名 c 点为一分点，那么 $f(x)$在$[a,b]$上的积分和等于$[a,c]$上的积分和$[c,b]$上的积分，即

$$\sum_{[a,b]} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{[a,c]} f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{[c,b]} f(\xi_i)\Delta x_i$$

上式两端同时取极限($\lambda\to 0$)，得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

注： 可以证明如果 c 在$[a,b]$之外，且 $f(x)$在$[a,c]$上定积分存在，此性质也成立，即仍有$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$，$c$ 在$[a,b]$内见图 3-5，c 在$[a,b]$外见图 3-6。

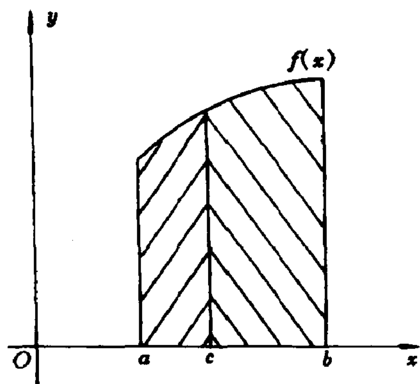


图 3-5

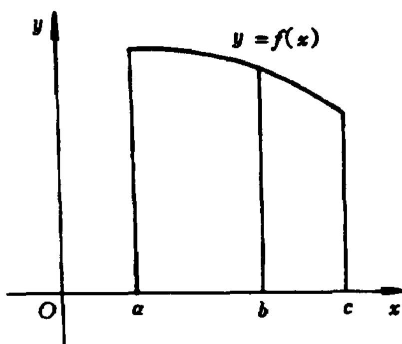


图 3-6

性质 4 若 $f(x)$和 $g(x)$在$[a,b]$上都可积，并有 $f(x)\leqslant g(x)$则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

证： 因为 $f(x)\leqslant g(x)$ $\quad x\in[a,b]$ 故 $f(\xi_i)\leqslant g(\xi_i)$，又因 $\Delta x_i\geqslant 0$，从而 $f(\xi_i)\Delta x_i\leqslant g(\xi_i)\Delta x_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$便有

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i \leqslant \sum_{i=1} g(\xi_i)\Delta x_i$$

当 $\lambda\to 0$ 时，对上面不等式两边取极限，由极限的性质可得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

[推论 1]设 m,M 分别为$f(x)$在$[a,b]$上的最小值和最大值，则

$$m(b-a)\leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M(b-a)$$

性质 5 (积分中值定理)若 $f(x)$在区间$[a,b]$上连续，则在$[a,b]$上至少存在一点 ξ，使

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a) \tag{3-18}$$

证： 由 $f(x)$在$[a,b]$上连续可知 $f(x)$在$[a,b]$上一定能取到最小值 m 和最大值M，再由本章推论 1，可知

$$m \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M$$

再由在闭区间上连续函数的介值性可知在$[a,b]$上至少存在 ξ，使

$$f(\xi)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \qquad (a\leqslant\xi\leqslant b)$$

这个性质的几何意义是，如果 $f(x)\geqslant 0$，连续曲线 $y=f(x)$、x 轴与直线 $x=a$、$x=b$ 所围成的曲边梯形的面积等于以$[a,b]$上某一点 ξ 的函数值$f(\xi)$为高，以$[a,b]$的长为宽的矩形面积(见图 3-7)。$f(\xi)$称为函数 $f(x)$在$[a,b]$上的平均值。

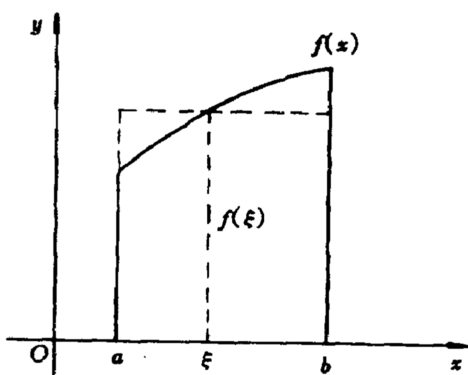


图 3-7

3.4 定积分的计算

按定义分割、近似、作和、取极限计算定积分，显然很麻烦，有时又很困难。我们已经学过不定积分，如果我们能用不定积分求原函数的运算来计算定积分，那么计算定积分的问题就显得简单多了。牛顿(Newton)和莱布尼茨(Leibniz)的微积分基本定理就是解决这个问题的。随着定积分的引入，又有一系列的积分法。

3.4.1 微积分基本定理

为了得到微积分基本定理，先研究积分上限函数的导数。

一、积分上限函数的导数

设函数 $f(x)$在$[a,b]$上连续，x 是$[a,b]$上任意一点，显然 $f(x)$在$[a,x]$上可积，即 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 存在。当上限 x 在区间$[a,b]$上变动时，对于每一个取定的 x 值，定积分有一个对应值，因此上述积分是 x 的一个函数，记为 $\Phi(x)$。

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t \qquad (a<x\leqslant b)$$

这个函数称为积分上限函数(又称可变上限积分)。

积分上限函数表示的是图 3-8 中阴影部分的面积，它有如下良好性质。

【定理 3】 设函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上连续，则 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 在区间$[a,b]$上可导，且有

$$\Phi'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = f(x) \quad (a\leqslant x\leqslant b)$$

注： 给 x 以改变量 Δx，则函数 $\Phi(x)$的相应改变量为

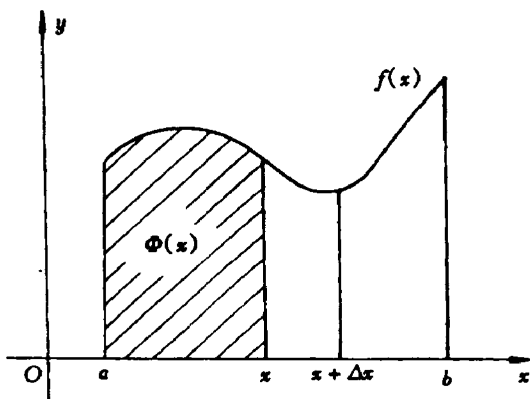


图 3-8

$$\Delta\Phi(x)=\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)$$
$$=\int_a^{x+\Delta x}f(t)\mathrm{d}t-\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$
$$=\int_x^a f(t)\mathrm{d}t+\int_a^{x+\Delta x}f(t)\mathrm{d}t$$
$$=\int_x^{x+\Delta x}f(t)\mathrm{d}t$$

由积分中值定理

$$\Delta\Phi(x)=\int_x^{x+\Delta x}f(t)\mathrm{d}t=f(\xi)\Delta x$$
$$(x\leqslant\xi\leqslant x+\Delta x)$$

从而有 $\dfrac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x}=f(\xi)$，由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，又因 $\Delta x\to0$ 时，$\xi\to x$，故

$$\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x}=\lim_{\xi\to x}f(\xi)=f(x)\text{，即 }\Phi'(x)=f(x)$$

由此可见，尽管定积分与不定积分的概念是完全不同的，但是二者之间存在着密切的联系，这种联系使微积分学形成一体。同时定理 3 还指出了区间上的连续函数 $f(x)$ 一定存在原函数，而积分上限函数 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 就是 $f(x)$ 的一个原函数。定理 3 还给出了求积分上限函数的导数方法。

例 29 设 $\Phi(x)=\int_1^x\sin^2t\,\mathrm{d}t$，求 $\Phi'(\frac{\pi}{3})$。

解： $\Phi'(x)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_1^x\sin^2t\,\mathrm{d}t=\sin^2x$，$\Phi'(\frac{\pi}{3})=(\frac{\sqrt3}{2})^2=\frac34$

例 30 设 $\Phi(x)=\int_{2x}^a f(t)\mathrm{d}t$，求 $\Phi'(x)$。

解： 设 $2x=u$，根据复合函数求导法则

$$\Phi'(x)=(\int_u^a f(t)\mathrm{d}t)'_u\cdot u'_x=(-\int_a^u f(t)\mathrm{d}t)'_u\cdot2x$$
$$=-f(u)\cdot2x=-2xf(2x)$$

例 31 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^{x^2}\sin(1+t^2)\mathrm{d}t}{x^2}$。

解： 当 $x\to0$ 时，$\int_0^{x^2}\sin(1+t^2)\mathrm{d}t\to0$，故该极限为 $\frac00$ 型不定式，据洛必达法则知

$$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{x^2}\sin(1+t^2)\mathrm{d}t}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{(\int_0^{x^2}\sin(1+t^2)\mathrm{d}t)'_x}{(x^2)'_x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin(1+x^4)\cdot2x}{2x}=\sin1$$

二、微积分基本定理

微积分基本定理也可叫做牛顿－莱布尼茨(Newton－Leibniz)公式，它是用求原函数

的方法计算定积分的数值。

【定理 4】 若 $f(x)$在区间$[a,b]$上连接，并且 $F(x)$是$[a,b]$上的一个原函数，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a) \tag{3-19}$$

证： 已知 $F(x)$是 $f(x)$的一个原函数，由定理 2 知 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 也是$f(x)$的一个原函数。由于同一函数的任何两个原函数之间只能相差一个常数，所以

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = F(x) + C$$

令 $x=a$，有

$$F(a)+C=\int_a^a f(t)\mathrm{d}t = 0$$

所以 $C=-F(a)$　上式变成 $\int_a^x f(x)\mathrm{d}x = F(x) - F(a)$

再令 $x=b$，则有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

为了书写简便，上述公式常写成

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b = [F(x)]_a^b$$

计算定积分时，先求被积函数的一个原函数，然后求这个原函数在区间$[a,b]$上端点函数值之差 $F(b)-F(a)$。

例 32 求 $\int_0^1 x^2\mathrm{d}x$ 。

解： $\int_0^1 x^2\mathrm{d}x = [\frac{1}{3}x^3]_0^1 = \frac{1}{3}\cdot 1^3 - \frac{1}{3}\cdot 0^3 = \frac{1}{3}$

例 33 求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(3x + \sin x)\mathrm{d}x$ 。

解：
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(3x + \sin x)\mathrm{d}x = 3\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}x$$
$$=\left[\frac{3}{2}x^2\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{8}\pi^2 + 1$$

3.4.2 定积分的换元积分法

由牛顿－莱布尼茨公式，定积分的求值问题可以转化为不定积分的问题。有时运算过程冗长复杂。如果直接采用定积分换元法，比较简便，下面我们讨论定积分换元法。

【定理 5】 设函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上连续；函数 $x=\varphi(t)$在区间$[\alpha,\beta]$上单调且有连续的导数 $\varphi'(t)$。当 t 在区间$[\alpha,\beta]$上变化时，$x=\varphi(t)$的值在区间$[a,b]$上变化，且有　$\varphi(\alpha)=a,\varphi(\beta)=b$。

则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t \tag{3-20}$$

证: 由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$f(x)$ 的原函数存在。设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则有 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$，由于 $\varphi'(t)$ 连续，$f(\varphi(t))\varphi'(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续，从而有 $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ 的原函数存在，由于 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数，那么，$F(\varphi(t))$ 也是 $f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$ 的一个原函数，由定理 4 有

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t = F[\varphi(t)]\Big|_\alpha^\beta = F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)]$$

$$= F(b) - F(a)$$

所以 $$\int_a^b f((x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

例 34 计算 $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\mathrm{d}x \quad (a > 0)$。

解: 设 $x = a\sin t$，则 $\mathrm{d}x = a\cos t\mathrm{d}t$，且当 $x = 0$ 时，$t = 0$；当 $x = a$ 时，$t = \frac{\pi}{2}$

于是

$$\int_0^a \sqrt{a^2 \quad x^2}\mathrm{d}x = a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\mathrm{d}t = \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1 + \cos 2t)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{a^2}{2}\left[t + \frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^2}{4}$$

换元公式也可以反过来使用，为使用方便起见，把换元公式中左右两边对调位置，同时把 t 改记为 x，得

$$\int_a^b f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(t)\mathrm{d}t$$

这样，我们可用 $t = \varphi(x)$ 来引入质变量 t，而 $\alpha = \varphi(a)$，$\beta = \varphi(b)$

例 35 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x\sin x\mathrm{d}x$。

解: 设 $t = \cos x$，则 $\mathrm{d}t = -\sin t\mathrm{d}x$，且当 $x = 0$ 时，$t = 1$；当 $x = \frac{\pi}{2}$ 时，$t = 0$

于是

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x\sin x\mathrm{d}x = -\int_1^0 t^5\mathrm{d}t = \left[\frac{t^6}{6}\right]_0^1 = \frac{1}{6}$$

例 36 计算 $\int_0^4 \frac{x + 2}{\sqrt{2x + 1}}\mathrm{d}x$。

解: 设 $\sqrt{2x+1} = t$，则 $x = \frac{t^2 - 1}{2}$，$\mathrm{d}x = t\mathrm{d}t$，且当 $x = 0$ 时，$t = 1$；当 $x = 4$ 时，$t = 3$

于是 $$\int_0^4 \frac{x + 2}{\sqrt{2x + 1}}\mathrm{d}x = \int_1^3 \frac{\frac{t^2 - 1}{2} + 2}{t}\cdot t\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_1^3 (t^2 + 3)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[\frac{t^3}{3} + 3t\right]_1^3 = \frac{22}{3}$$

必须指出，在用 $t = \varphi(x)$ 进行换元时，如果不注意反函数 $x = \Phi\ ^{1}(t)$ 为单值的条件，

就可能会发生错误。例如积分

$$\int_{-1}^{2} x^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{3}[x^3]^2{}_1 = 3$$

但用代换 $x^2=t$,得 $x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sqrt{t}\,\mathrm{d}t, \alpha=1,\beta=4$

$$\int_{-1}^{2} x^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{1}^{4}\sqrt{t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\ [t^{\frac{3}{2}}]_1^4 = \frac{7}{3}$$

错误的原因是由于当 x 在区间$[-1,2]$上变动时,函数 $t=x^2$ 的反函数 $x=\pm\sqrt{t}$不是单值。在$[-1,2]$上不满足定理 5 的单调性。

例 37 证明奇偶函数的性质:

若 $f(x)$是$[-a,a]$上连续的偶函数,则 $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$;若 $f(x)$ 是$[-a,a]$上连续的奇函数,则 $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0$。

证: 由定积分的性质 $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x + \int_0^a f(x)\mathrm{d}x$

又因为

$$\int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x \xlongequal{\text{令}x=-t} \int_a^0 f(-t)\mathrm{d}(-t) = -\int_a^0 f(-t)\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^a f(-t)\mathrm{d}t = \int_0^a f(-x)\mathrm{d}x$$

所以

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x + \int_0^a f(x)\mathrm{d}x = \int_0^a f(-x)\mathrm{d}x + \int_0^a f(x)\mathrm{d}x$$

$$= [\int_0^a f(-x) + f(x)]\mathrm{d}x$$

当 $f(x)$为偶函数时,$f(-x)=f(x)$ $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$;当 $f(x)$为奇函数时,$f(-x)=-f(x)$,$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0$。

该例可以简化计算奇、偶函数在对称于原点的区间上的定积分。

3.4.3 定积分的分部积分法

设函数 $u=u(x)$及 $v=v(x)$在区间$[a,b]$上有连续的导数,由微分法则,有 $\mathrm{d}(uv)=u\mathrm{d}v+v\mathrm{d}u$,即$(uv)'\mathrm{d}x=uv'\mathrm{d}x+vu'\mathrm{d}x$,所以 $u\mathrm{d}v=\mathrm{d}(uv)-v\mathrm{d}u$,等式两端各取由 a 到 b 的定积分,有

$$\int_a^b uv'\mathrm{d}x = \int_a^b (uv)'\mathrm{d}x - \int_a^b vu'\mathrm{d}x = [uv]_a^b - \int_a^b vu'\mathrm{d}x \tag{3-21}$$

(3-21)式称为定积分的分部积分公式。该式又常常简写成

$$\int_a^b u\mathrm{d}v = [uv]_a^b - \int_a^b v\mathrm{d}u \qquad (3\text{-}21)'$$

例 38 求 $\int_0^1 x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$。

解: 令 $u=x, \mathrm{d}v=\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$,则 $\mathrm{d}u=\mathrm{d}x, v=-\mathrm{e}^{-x}$

故

$$\int_0^1 x e^{-x} dx = x(-e^{-x})\Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx$$

$$= -xe^{-x}\Big|_0^1 - e^{-x}\Big|_0^1 = -e^{-1} - e^{-1} + 1 = 1 - \frac{2}{e}$$

例 39 求 $\int_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x| dx$。

解： 在$[\frac{1}{e},1]$上 $\ln x \leqslant 0$，故 $|\ln x| = -\ln x$，在$[1,e]$上 $\ln x \geqslant 0$，故 $|\ln x| = \ln x$，从而有

$$\int_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x| dx = \int_{\frac{1}{e}}^{1} (-\ln x) dx + \int_1^e \ln x dx$$

用分部积分法计算上式右端两个积分，有

$$\int_{\frac{1}{e}}^{1} (-\ln x) dx = -x\ln x\Big|_{\frac{1}{e}}^{1} + \int_{\frac{1}{e}}^{1} x d\ln x$$

$$= 0 + \frac{1}{e}\ln\frac{1}{e} + x\Big|_{\frac{1}{e}}^{1} = -\frac{1}{e} + (1 - \frac{1}{e}) = 1 - \frac{2}{e}$$

$$\int_1^e \ln x dx = x\ln x\Big|_1^e - \int_1^e dx = e - (e - 1) = 1$$

所以 $\int_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x| dx = 2 - \frac{2}{e}$

例 40 求 $\int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx$。

解： 令 $t = \sqrt{x}$，则 $dx = 2, t dt$，

当 $x = 0$ 时，$t = 0$；$x = 1$ 时，

$t = 1$。因此

$$\int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 e^t \cdot 2t dt = 2\int_0^1 t de^t = 2te^t\Big|_0^1 - 2\int_0^1 e^t dt = 2e - 2e + 2 = 2$$

3.4.4 定积分的近似计算

到目前为止，我们计算定积分时都是使用牛顿－莱布尼茨公式。但在实际应用中常常遇见被积函数不能用解析式子表示，医学上往往用实验测得的图形或数字给出；有些被积函数的原函数不能用初等函数表示，如 $\int e^{-x^2} dx$。所以，我们就需要考虑定积分的近似计算问题。

一、矩形法

矩形法(rectanglar method)就是用小矩形的面积近似代替小曲边梯形面积。具体做法和公式如下：

若要求定积分 $\int_a^b f(x) dx$ 的近似值，把$[a, b]$分为 n 个相等的小区间，设其分点为

$a=x_0<x_1<\cdots<x_{i-1}<x_i<\cdots<x_n=b$,每个小区间长度为 $\Delta x=\dfrac{b-a}{n}$,函数在各分点的函数值为 $y_0,y_1,\cdots,y_n$。

如果用小矩形的面积近似代替小曲边梯形面积,累加求小矩形面积的和,便有近似公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx y_0\Delta x + y_1\Delta x + \cdots + y_{n-1}\Delta x$$

$$= \frac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + \cdots + y_{n-1}) \tag{3-22}$$

或

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx y_1\Delta x + y_2\Delta x + \cdots + y_n\Delta x$$

$$= \frac{b-a}{n}(y_1 + y_2 + \cdots + y_n) \tag{3-23}$$

公式(3-22)、(3-23)分别被称为左矩形公式,右矩形公式。

二、梯形法

梯形法(trapezoied method)就是用小梯形的面积近似代替小曲边梯形的面积,其近似公式如下:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{1}{2}(y_0 + y_1)\Delta x + \frac{1}{2}(y_1 + y_2)\Delta x + \cdots + \frac{1}{2}(y_{n-1} + y_n)\Delta x$$

$$= \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1}\right) \tag{3-24}$$

式(3-24)被称为梯形法公式。

三、抛物线法

不难看出,梯形法所得的近似计算结果要比矩形法更精确,但它们都是小区间上直线段近似代替相应的曲线段。为了减小误差,提高精确度,可以考虑在小区间上用二次函数(抛物线),$y=px^2+9x+r$ 弯曲的曲线近似地代替原来的被积函数局部曲线,用这样一系列抛物线弧形成的曲边梯形面积来近似代替曲线 $y=f(x)$的弧形成的曲边梯形面积,这就是所谓的"抛物线法。"

公式的具体推导略,只给出如下(辛普森)(Simposon)公式:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{3n}[(y_0 + y_n) + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{n-2}) + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{n-1})] \tag{3-25}$$

其中 n 为偶数。

例 41 利用梯形法计算 $\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$ 的近似值。

解 取 $n=10$,即将区间[0,1]10 等分,设分点 $0=x_0,x_1,\cdots,x_8,x_9,x_{10}=1$ 根据被积函数及指数函数表,列表如下:

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
y_i	1.0000	0.99005	0.96079	0.91393	0.85214	0.71788	0.69768	0.61263	0.52729	0.44486	0.36788

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \approx \frac{1-0}{10}[\frac{1}{2}(1+0.36788)+0.99005+0.96079+0.91393$$
$$+0.85214+0.77880+0.69768+0.61263+0.52729+0.44486]=0.746261$$

例 42 分别利用梯形法和抛物线法计算积分$\int_1^2 \frac{dx}{x}$的近似值。

解: 由定积分和自然对数表,可得

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} = [\ln x]_1^2 = \ln 2 = 0.6931$$

现在分别用梯形法和抛物线法计算其近似值

取 $n=10$,将区间[1,2]分成 10 等分,设分点为

$$1=x_0, x_1, x_2, \cdots, x_9, x_{10}=2$$

相应的函数值为 $y_0, y_1, \cdots, y_9, y_{10}$

其中 $y_i=\frac{1}{x_i}$ $(i=0,1,2\cdots,10)$

列表表示如下:

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2
y_i	1.0000	0.9091	0.8333	0.7692	0.7143	0.6667	0.6250	0.5882	0.5556	0.5263	0.5000

用梯形法公式得

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx \frac{b-a}{n}(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+\cdots+y_{n-1})$$
$$=\frac{1}{10}(\frac{1+2}{2}+0.9091+0.8333+0.7692+0.7143+0.6667$$
$$+0.6250+0.5882+0.5556+0.5263)$$
$$=0.76877$$

用抛物线法公式,则得

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx \frac{b-a}{3n}[(y_0+y_n)+2(y_2+y_4+y_6+y_8)+4(y_1+y_3+y_5+y_7+y_9)]$$
$$=\frac{2-1}{3\times 10}[(1+2)+2(0.8333+0.7143+0.6250+0.5556)+4(0.9091$$
$$+0.7692+0.6667+0.5882+0.5263)]\approx 0.74315$$

与 $\ln 2=0.6931$ 相差不多。

不难看出,抛物线法比梯形法所得的近似值更精确。在实际问题中,一般常常使用抛物线法。

3.4.5 定积分的应用

一、微元法

在应用定积分解决实际问题时,关键是将实际问题归结为定积分。定积分的定义导出有四步,先将$[a,b]$分成 n 个小区间,然后在每个小区间上作近似替代 $\Delta A_i \approx f(\xi_i)\Delta x_i$,再求积分和 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$,最后取极限 $\lim_{\lambda \to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 抽象为定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$。若细致分析一下,具体问题只要抓住如下两步便可:

(1)在区间$[a,b]$上任取一点 x,在区间$[x,x+\mathrm{d}x]$作微元 $\mathrm{d}A=f(x)\mathrm{d}x$

(2)对$[a,b]$上每一点 x 的微元无限累加,即

$$\int_a^b \mathrm{d}A = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

这就是微元法。

下面通过例题说明怎样用微元法将实际问题化成定积分。

例 43 计算在区间$[a,b]$上的连续曲线 $y=f(x)$,x 轴,直线 $x=a$ 与 $x=b$ 所围成的曲边梯形面积。

解: (1)在区间$[a,b]$上任取一点 x,在 x 上作面积微元 $\mathrm{d}A=f(x)\mathrm{d}x$(矩形面积=高×宽),见图 3-9。

(2)再将每一点 x 的面积微元dA从 a 到b 无限连续累加起来,即作 a 到b 的定积分,便有

$$A=\int_a^b \mathrm{d}A = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

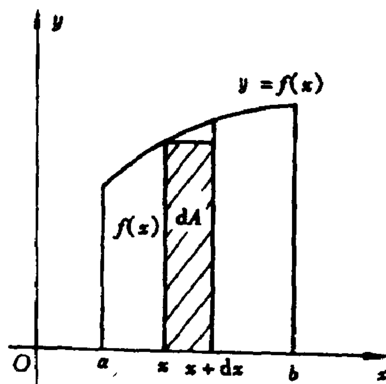


图 3-9

例 44 已知物体直线运动的速度是 $v(t)$,计算从时刻 a 到时刻b 物体运动的路程。

解: (1)在$[a,b]$上任取一时刻 t,则时刻 t 到 $t+\mathrm{d}t$ 时间内物体运动的路程微元

$\mathrm{d}s=v(t)\mathrm{d}t$ (路程=速度×时间)

(2)所求路程是各微元 $\mathrm{d}s$ 从a 到b 的无限累加求和,也就是微元 $\mathrm{d}s$ 从a 到b 的定积分

$$s=\int_a^b \mathrm{d}s = \int_a^b v(t)\mathrm{d}t$$

二、平面图形的面积

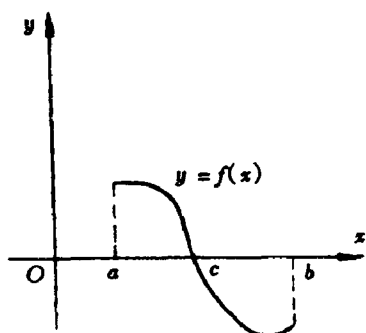
围成平面图形的曲线可以用不同形式表示,以下分两积情况讨论:

1. 直角坐标系的情况

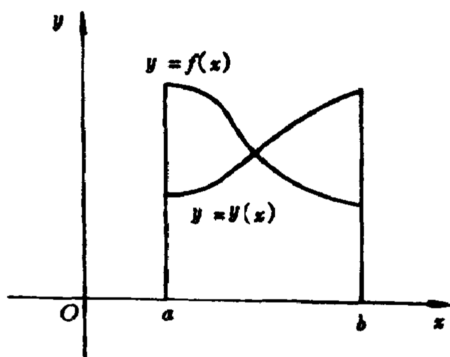
由定积分的几何意义,求由曲线 $y=f(x)$,x 轴及二直线 $x=a$,$x=b$ 围成的平面图形面积,见图 3-10(a)。显然,在$[a,c]$上有 $f(x)\geqslant 0$,$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x$ 为正的,在$[c,b]$上,

$f(x)\leqslant 0$，$\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$ 为负的，由于习惯上面积值总是取正值，所以在$[c,b]$上的积分中的被积函数加上绝对值，即$\int_c^b |f(x)|\mathrm{d}x$，这样求出来的结果与习惯上面积为正值是一致的。将把$[a,b]$上求曲线所围成的平面图形面积 A 统一起来，故

$$A=\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$$



(a)



(b)

图 3-10

同理[见图 3-10(b)]，如果图形是由$[a,b]$上两条连续曲线 $y=f(x)$与 $y=g(x)$(彼此可能相交)及二直线 $x=a$ 与 $x=b$ 所围成，其面积 A 是

$$A=\int_a^b |f(x)-g(x)|\mathrm{d}x$$

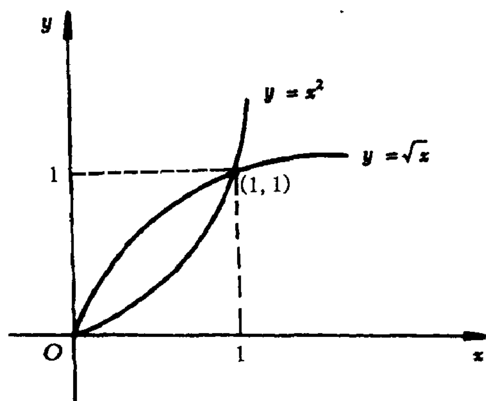


图 3-11

例 45 求由两条曲线 $y=x^2$ 与 $x=y^2$ 围成的平面图形面积。

解：两条曲线的交点是$(0,0)$上$(1,1)$，见图 3-11，故此面积 A 为

$$A=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)\mathrm{d}x=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{1}{3}$$

例 46 求抛物线 $y^2=2x$ 及直线 $y=x-4$ 所围成图形的面积。

解： 解$\begin{cases}y^2=2x\\y=x-4\end{cases}$ 得交点$(2,-2)$，$(8,4)$

将 x 当作变量，$S=S_1+S_2$，其中 $S_1=\int_0^2(y_1-y_2)\mathrm{d}x$，$S_2=\int_2^8(y_1-y_3)\mathrm{d}x$，故

$$S=S_1+S_2=\int_0^2[\sqrt{2x}-(-\sqrt{2x})]\,\mathrm{d}x+\int_2^8[\sqrt{2x}-(x-4)]\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^2 2\sqrt{2x}\mathrm{d}x+\int_2^8(\sqrt{2x}-x+4)\mathrm{d}x=18$$

若将 y 作为积分变量，即曲线由 $x=\frac{1}{2}y^2$，$x=y+4$ 表示，这时所求面积的积分公式可用微元法得到。在$[-2,4]$上任取一点 y，作面积微元

$$dA = f(y)dy = [(y+4) - \frac{y^2}{2}]dy$$

故 $A = \int_{-2}^{4} dA = \int_{2}^{4} [y + 4 - \frac{y^2}{2}]dy = [\frac{1}{2}y^2 + 4y - \frac{1}{6}y^3]_{-2}^{4} = 18$

2. 极坐标情况:若曲线是由极坐标方程

$$r = r(\theta) \qquad \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$$

给出,其中 $r(\theta)$在$[\alpha,\beta]$上连续,求曲线 $r = r(\theta)$及二射线 $\theta = \alpha, \theta = \beta$ 围成图形的面积

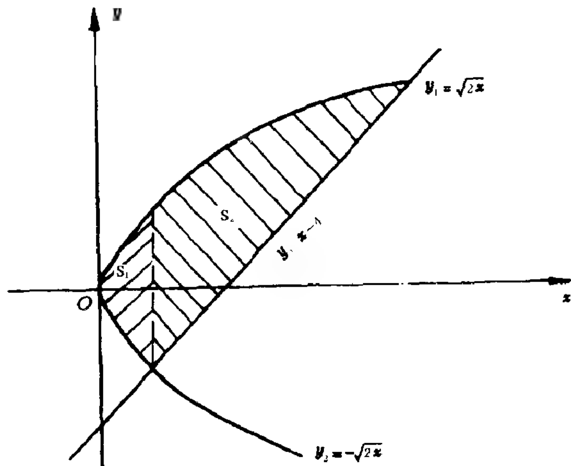


图 3-12

(图 3-13)　应用微元法:在$[\alpha,\beta]$上任取一个 θ,在$[\theta,\theta + d\theta]$上作微元 dA 由扇形面积公式,可知所作的面积微元

$$dA = \frac{1}{2}r^2 d\theta$$

再将面积微元 dA 从 α 到 β 无限连续累加——做积分,便得此区域的面积

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} dA = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}[r(\theta)]^2 d\theta$$

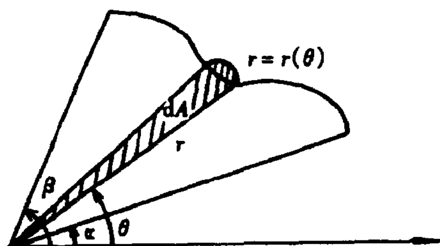


图 3-13

例 47　推导圆的面积公式。

解:　圆的极坐标方程为 $r = R$(R 为圆的半径)

$$A = \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi} R^2 d\theta = \frac{1}{2}R^2\theta \Big|_{0}^{2\pi} = \pi R^2$$

三、旋转体的体积

旋转体可以看成由一个平面图形绕某一轴旋转一周而成的体积,叫旋转体(volumes of revolution)。例如矩形绕它一条直角边旋转一周便得到圆柱体,直角三角形绕它的一条直角边旋转便得圆锥体等等。

如何求曲线 $y = f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ 与 $x - a$, $x = b$ 及 x 轴围成的平面图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的体积(图 3-14)。

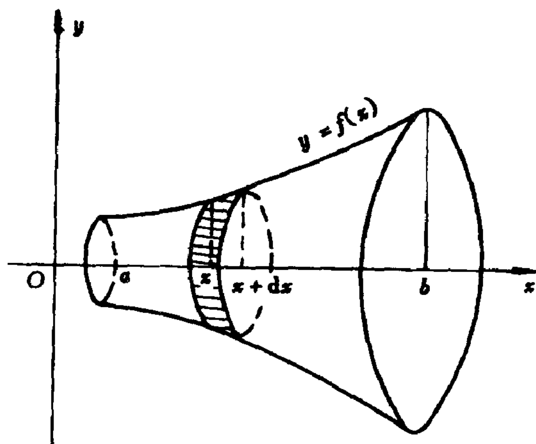


图 3-14

在$[a,b]$内任取一点 x,在$[x,x+dx]$作体积微元,由圆柱体体积公式可得

$$dv=\pi y^2 dx=\pi f^2(x)dx$$

对微元 dv 从a 到b 作无限连续累加,得绕 x 轴旋转一周的体积

$$V_x=\int_a^b dv=\pi\int_a^b f^2(x)dx$$

注: 类似将曲线 $x=f^{-1}(y)$ $(c\leqslant y\leqslant d)$绕 y 轴旋转产生的体积为

$$Vy=\pi\int_c^b x^2 dy=\pi\int_c^d [f^{-1}(y)]^2 dy$$

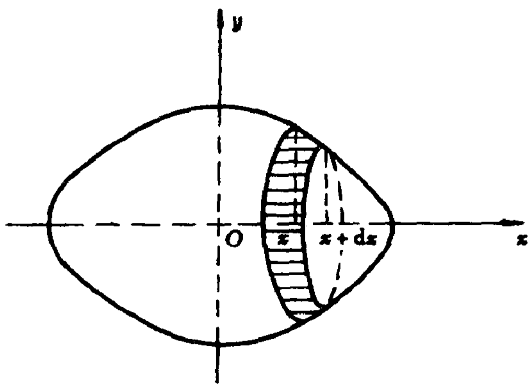


图 3-15

例 48 求椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的上半部与 x 轴围成的图形绕x 轴旋转成的体积。

解: 椭圆上半部的方程为 $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$,见图 3-15。由旋转体的体积公式

$$\begin{aligned}V_x&=\pi\int_{-a}^{a}[\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}]^2dx\\&=\pi\frac{b^2}{a^2}\int_{-a}^{a}(a^2-x^2)dx\\&=\pi\frac{b^2}{a^2}\Big[a^2x-\frac{x^3}{3}\Big]_{-a}^{a}=\frac{4}{3}\pi ab^2\end{aligned}$$

例 49 求由抛物线 $y=x^2$ 及直线 $x=2$,x 轴所围成的平面图形绕 y 轴旋转成的体积。

解: 设所求体积为 V,见图 3-16。$V=$圆柱体体积$-$($y=x^2$ 绕 y 轴旋转成的体积)

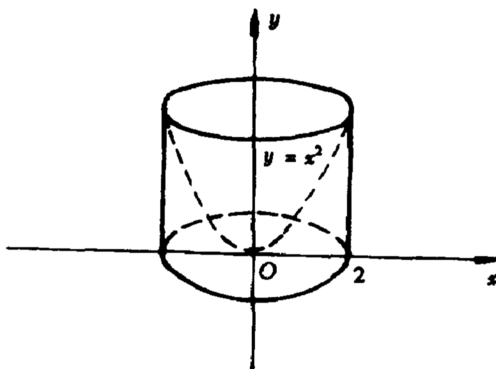


图 3-16

$$V=\pi\cdot 2^2\cdot 4-\pi\int_0^4(\sqrt{y})^2\mathrm{d}y$$
$$=16\pi-\pi\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^4=8\pi$$

四、平面曲线弧长

设 $y=f(x)$在$[a,b]$上有连续导数 $f'(x)$,求曲线在$[a,b]$上的弧长 l(图 3-17)

用微元法,在$[a,b]$上任取小区间$[x、x+\mathrm{d}x]$,相应地截取了一小段弧$\overset{\frown}{AD}$,过 A 作切线 AC,则 $BC=\mathrm{d}y$,若 $\mathrm{d}x$ 很小,则 $AC\approx\overset{\frown}{AD}$,而 $AC=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}$,所以有

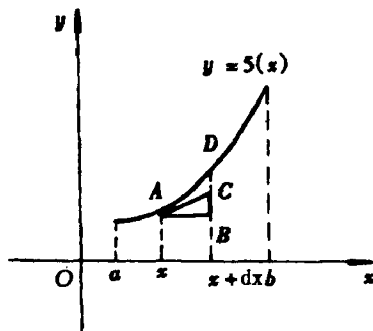


图 3-17

$$\mathrm{d}l=\overset{\frown}{AD}$$
$$\approx\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}$$
$$=\sqrt{1+(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})^2}\cdot\mathrm{d}x$$

从而得到弧长 l 的微元 $\mathrm{d}l=\sqrt{1+(y')^2}\mathrm{d}x$,积分得

$$l=\int_a^b\sqrt{1+(y')^2}\mathrm{d}x \tag{3-26}$$

例 50 证明半径为 a 的圆的周长为 $2a\pi$。

解: 设半径 a 的圆的方程为$x^2+y^2=a^2$,则

$$y=\sqrt{a^2-x^2},y'=\frac{1}{2}(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)$$
$$l=4\int_0^a\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2}}\mathrm{d}x=4\int_0^a\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x$$
$$=4a\arcsin\frac{x}{a}\bigg|_0^a=4a\cdot\frac{\pi}{2}=2\pi a$$

五、变力做功

我们知道一个常力 F(力的方向,大小都不变)将物体沿力的方向从点 a 推到点 b,所做的功 $W=F(b-a)$。

现在求变力 $F(x)$(方向不变)将物体沿力的方向从点 a 移到点 b 所做的功 W,如图 3-18。

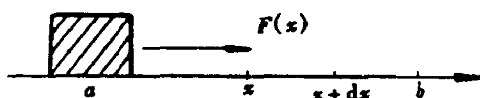


图 3-18

在 $[a,b]$ 内任取一点 x,得功的微元

$$dW=F(x)dx$$

$$W=\int_a^b F(x)dx$$

例 51 设一圆柱形的贮水池高为 5 米,底面半径为 3 米(图 3-19),池内装满了水,试问把池内的水全部抽出需做功多少?

解: 在 $[0,5]$ 内任取一点 x,把小区间 $[x,x+dx]$ 看成很薄的水层,这层水的重量为 $1000.g\pi\cdot 3^2dx$(水的密度为 1000 千克/米^3),把这层水抽出池外需做功近似为 $dW=9000g\pi dx$,于是所求的功为

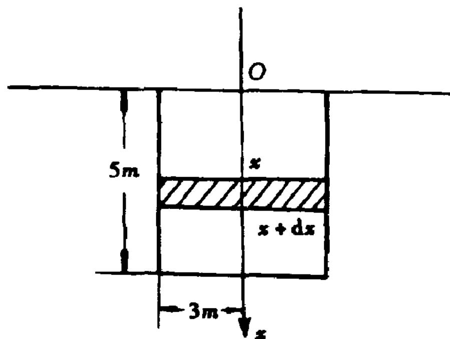


图 3-19

$$W=\int_0^5 9000g\pi x\,dx=9000\times 9.8\pi\times\frac{x^2}{2}\Big|_0^5$$

$$\approx 3463604.2\text{(焦耳)}$$

六、连续函数的平均值

根据定积分中值定理知,若函数 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,则 $y=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ 。即函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的平均值等于函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的定积分值除以闭区间 $[a,b]$ 的长度 $b-a$。

例 52 已知某化学反应的速度为 $v=ak\mathrm{e}^{-kt}$,其中 a,k 为常数,求时间区间 $[0,t_1]$ 内的平均速度。

解: $\bar{v}=\frac{1}{t_1-0}\int_0^{t_1}ak\mathrm{e}^{-kt}dt=\frac{a}{t_1}(1-\mathrm{e}^{-kt_1})$

最后运用微元法求医学中的脉管稳定流中的血流量。

例 53 假定长为 L,半径为 R 的一段血管,左端为相对动脉管,其血压为 p_1,右端为相对静脉管,血压为 p_2,且 $p_1>p_2$[见图 3-20(a)]。若血管某截面上某一点与血管中心距离为 r,其流速 $v(r)=\frac{p_1-p_2}{4\eta L}(R^2-r^2)$,其中 η 为血液粘滞系数,求单位时间内,通过该截面的血流量 Q。

解: 将半径为 R 的截面圆上,求出通过截面的某个圆环的血流量 ΔQ 的近似值。在 $[0,R]$ 上任取一点 r,在 $[r,r+\Delta r]$ 上圆环面积近似值为 $2\pi r\Delta r$[见图 3-20(b)]所以在单位时间内,区间上的血流量微元是

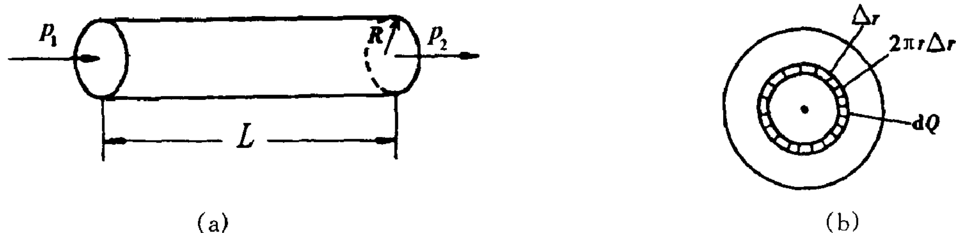


图 3-20

$$dQ = v(r) 2\pi r \Delta r$$

$$
\begin{aligned}
Q &= \int_0^R \mathrm{d}Q = \int_0^R v(r) 2\pi r \mathrm{d}r = \int_0^R \frac{p_1 - p_2}{4\eta L}(R^2 - r^2) 2\pi r \mathrm{d}r \\
&= \frac{\pi(p_1 - p_2)}{2\eta L}\int_0^R (R^2 r - r^3)\mathrm{d}r = \frac{\pi(p_1 - p_2)}{2\eta L}\left(R^2 \cdot \frac{r^2}{2} \cdot \Big|_0^R - \frac{r^4}{4}\Big|_0^R\right) \\
&= \frac{\pi(p_1 - p_2)R^4}{8\eta L}
\end{aligned}
$$

3.5 广义积分

在一些实际问题中，我们常遇到积分区间为无穷区间，或者被积函数为无界函数的积分，它们已经不属于前面所说的定积分了。如求直线 $x = 1$ 与 x 轴 $(1, +\infty)$ 和函数 $\frac{1}{x^2}$ 所围成的面积；又如，求积分 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \mathrm{d}x$ 中的被积函数有 $\lim\limits_{x \to 1} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = \infty$。因此，我们对定积分作如下两种推广，从而形成"广义积分"的概念。

3.5.1 无穷区间上的广义积分

【定义 4】 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, +\infty)$ 内连续，b 是 $[a, +\infty)$ 内任一实数，若极限 $\lim\limits_{b \to +\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 存在，则称此极限值为函数 $f(x)$ 在区间 $[a, +\infty)$ 内的广义积分(improper integral)，记做

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \to +\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

并称此时广义积分收敛(convergence)，否则，若 $\lim\limits_{b \to +\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 不存在，则称此时广义积分发散(divergence)。

同样可定义在区间 $(+\infty, b]$ 上的广义积分

$$\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{a \to -\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

符号 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 称为 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上的广义积分，如果对任意实数 C，广义积分 $\int_{-\infty}^{c} f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_c^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 都收敛，则称广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛或存在，否则称为发散。

例 54 计算广义积分$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$。

解：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\int_{-\infty}^{0}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}+\int_{0}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$$

$$=\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}+\lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$$

$$=\lim_{a\to-\infty}[\operatorname{arctg}x]_a^0+\lim_{b\to+\infty}[\operatorname{arctg}x]_0^b$$

$$=-\lim_{a\to-\infty}\operatorname{arctg}a+\lim_{b\to+\infty}\operatorname{arctg}b$$

$$=-(-\frac{\pi}{2})+\frac{\pi}{2}=\pi$$

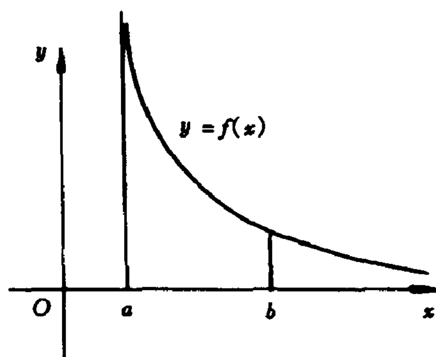


图 3-21

这个广义积分值的几何意义是：当 $a\to-\infty$，$b\to+\infty$时，虽然(图 3-22)中阴影部分向左、右无限延伸，但面积却有极限值 π。简单地说，它是位于曲线 $y=\frac{1}{1+x^2}$的下方，x 轴上方的图形面积。

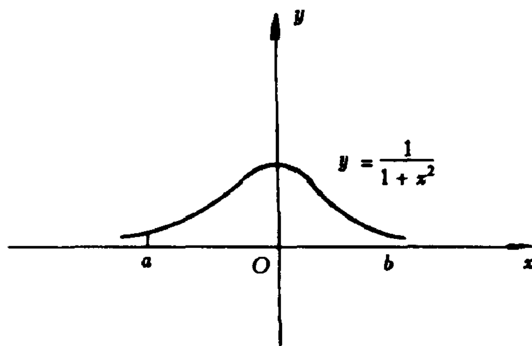


图 3-22

例 55 讨论广义积分$\int_{4}^{+\infty}\frac{1}{x^{-\frac{1}{2}}}\mathrm{d}x$ 的敛散性。

解：

$$\int_{4}^{+\infty}\frac{1}{x^{-\frac{1}{2}}}\mathrm{d}x=\lim_{b\to+\infty}\int_{4}^{b}\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\mathrm{d}x=\lim_{b\to+\infty}2x^{\frac{1}{2}}\Big|_4^b$$

$$=\lim_{b\to+\infty}(2b^{\frac{1}{2}}\quad 4)=+\infty$$

所以$\int_4^{+\infty} x^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x$是发散的。

3.5.2 无界函数的广义积分

【定义 5】 设函数 $f(x)$在$(a,b]$上连续，且$\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\infty$，如果对于任意 $\varepsilon>0$，极限 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\mathrm{d}x$ 存在，则称此极限值为函数 $f(x)$在$[a,b]$上的广义积分，记为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\mathrm{d}x$$

并称此时广义积分收敛，否则就说广义积分发散(图 3-23)，其中 a 称为瑕点，此积分也称为瑕积分。同样，若函数 $f(x)$在区间$[a,b)$上连续，且 $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)=\infty$，任取 $\varepsilon>0$，则定义广义积分

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x$$

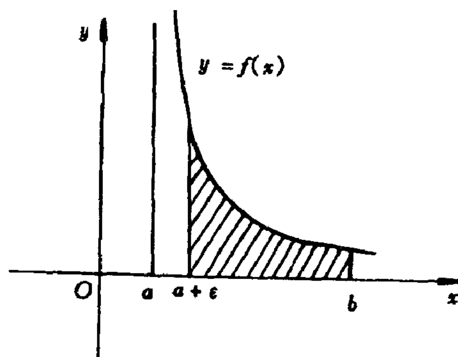


图 3-23

若函数 $f(x)$在区间$[a,b]$内除 $x=c$ 外连续，且$\lim\limits_{x\to c} f(x)=\infty$，任取 $\varepsilon_1>0,\varepsilon_2>0$，则定义广义积分

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{\varepsilon_1\to 0}\int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)\mathrm{d}x + \lim_{\varepsilon_2\to 0}\int_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)\mathrm{d}x$$

只有当右边两个极限都存在时，广义积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 才收敛，否则称广义积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散。

例 56 计算广义积分$\int_0^a \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}$ $(a>0)$。

解： 因为 $\lim\limits_{x\to a-0}\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}=+\infty$，$x=a$ 为瑕点，所以

$$\int_0^a \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{a-\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\arcsin\frac{x}{a}\right]_0^{a-\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to 0}\arcsin\frac{a-\varepsilon}{a}=\frac{\pi}{2}$$

这个广义积分的几何意义是位于曲线 $y=\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$之下，$x$ 轴之上，直线 $x=0$ 与 $x=a$之间的图形的面积(图 3-24)。

例 57 判别$\int_{-1}^{1}\dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ 的敛散性。

解： 被积函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$在积分区间$[-1,1]$上除 $x=0$ 外皆连续，且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=\infty$，并由于

$$\int_{-1}^{0}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-1}^{0-\varepsilon}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{0-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right) = +\infty$$

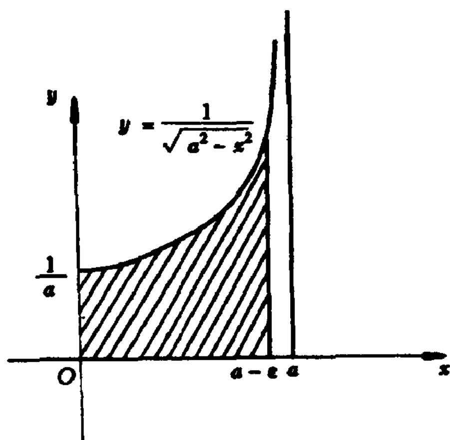


图 3-24

即广义积分$\int_{-1}^{0}\frac{1}{x}dx$ 发散，所以广义积分 $\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2}dx$ 发散。

注意： 如果疏忽于 $x=0$ 是被积函数的瑕点(或无穷间断点)，就会得到以下错误结果

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2}dx=\left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{1}=-1-1=-2$$

小　　结

本章主要讨论了不定积分、定积分的概念、性质及计算。关于不定积分，我们重点介绍了第一换元法(“凑”微分方法)、第二换元法及分部积分法，它们既是本章的重点，也是难点。定积分的计算也正是在不定积分的运算基础上提出来的，牛顿－莱布尼茨公式揭示了这一内在联系。其次，定积分作为一个和式的极限、具有广泛的应用价值。本章介绍的“微元法”给出了用定积分解决实际问题的一般方法，如计算平面图形的面积，旋转体的体积等等。

广义积分是定积分的推广，它是极限和定积分的结合。广义积分在统计中也有着重要的应用。

习　　题

1．试证三个函数 $y=2\ln x$、$y=2\ln(ax)$和 $y=\ln(x^2)$是同一函数的原函数。

2．下面的说法对吗？为什么？

(1)若 $F(x)$是 $f(x)$的一个原函数，则 $F(x)$是 $f(x)$的不定积分。

(2)不定积分 $\int f(x)dx$ 是$f(x)$的一个原函数。

(3)若 $f(x)$的某个原函数为常数，则 $f(x)\equiv 0$。

(4) $\int u^x du$ 和 $\int u^x dx$ 是不同的不定积分。

(5)多项式函数的不定积分一定是多项式函数。

3. 求下列不定积分。

(1) $\int(1-3x^2)\mathrm{d}x$

(2) $\int(2^x+x^2)\mathrm{d}x$

(3) $\int\frac{x+1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

(4) $\int\sqrt{x}(x-3)\mathrm{d}x$

(5) $\int\frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$

(6) $\int\frac{x^2}{1-x^2}\mathrm{d}x$

(7) $\int\sin^2\frac{x}{2}\mathrm{d}x$

(8) $\int\cot^2 x\mathrm{d}x$

(9) $\int\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

(10) $\int\frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^x+1}\mathrm{d}x$

(11) $\int\frac{\cos 2x}{\cos x+\sin x}\mathrm{d}x$

(12) $\int\frac{1}{x^2(1+x^2)}\mathrm{d}x$

(13) $\int\frac{1}{\cos^2 x\sin^2 x}\mathrm{d}x$

(14) $\int\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^4}}\mathrm{d}x$

(15) $\int\left(1+\sin x+\frac{1}{2}\cos x\right)\mathrm{d}x$

4. 求下列不定积分。

(1) $\int(2-x)^{\frac{5}{2}}\mathrm{d}x$

(2) $\int\frac{1}{(1-2x)^2}\mathrm{d}x$

(3) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2-3x^2}}$

(4) $\int\frac{1}{1-\cos x}\mathrm{d}x$

(5) $\int a^{3x}\mathrm{d}x$

(6) $\int\frac{2x-1}{x^2-x+3}\mathrm{d}x$

(7) $\int(\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-2x})\mathrm{d}x$

(8) $\int(\sin 5x-\sin 5a)\mathrm{d}x$

(9) $\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$

(10) $\int x^2\sqrt[3]{1+x^3}\mathrm{d}x$

(11) $\int\frac{x}{4+x^4}\mathrm{d}x$

(12) $\int\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\mathrm{d}x$

(13) $\int x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$

(14) $\int\frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}}\mathrm{d}x$

(15) $\int\frac{1}{\sin^2 x\sqrt[4]{\cos x}}\mathrm{d}x$

(16) $\int\frac{\mathrm{arc\ tg}x}{1+x^2}\mathrm{d}x$

(17) $\int\frac{1}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x$

(18) $\int\frac{1}{1+x^2}\ln\frac{1+x}{1-x}\mathrm{d}x$

(19) $\int\frac{1}{(x-1)(x+3)}\mathrm{d}x$

(20) $\int\frac{1}{(x^2+1)(x^2+2)}\mathrm{d}x$

(21) $\int\sin 3x\sin x\mathrm{d}x$

(22) $\int\sin^4 x\mathrm{d}x$

(23) $\int\cos^5 x\mathrm{d}x$

(24) $\int\mathrm{tg}^3 x\mathrm{d}x$

(25) $\int\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x^2}\mathrm{d}x$

(26) $\int(\ln x)^2\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x$

(27) $\int e^{\sin x}\cos x\,dx$

(28) $\int \frac{1}{4-9x^2}dx$

(29) $\int \frac{dx}{(\arcsin x)^2\sqrt{1-x^2}}$

(30) $\int \frac{1}{x^2-2x+2}dx$

(31) $\int \frac{(1+e^x)^2}{1+e^{2x}}dx$

(32) $\int \frac{x^2+7}{x^2-2x-3}dx$

5. 求下列不定积分。

(1) $\int x^2\sqrt[3]{1-x}\,dx$

(2) $\int \frac{x^2}{\sqrt{2-x}}dx$

(3) $\int \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}dx$

(4) $\int \frac{\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}dx$

(5) $\int \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$

(6) $\int \frac{1}{(x^2+a^2)^{3/2}}dx$

(7) $\int \frac{1}{\sqrt{9x^2-4}}dx$

(8) $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}dx$

(9) $\int \cos^5 x\sqrt{\sin x}\,dx$

(10) $\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}dx$

(11) $\int \frac{1}{e^{\frac{x}{2}}+e^x}dx$

(12) $\int \frac{1}{\sin^4 x}dx$

(13) $\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}dx$

(14) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx$

6. 求下列不定积分。

(1) $\int \operatorname{arctg} x\,dx$

(2) $\int x^n\ln x\,dx \quad (n\neq -1)$

(3) $\int \sqrt{x}\ln^2 x\,dx$

(4) $\int e^{\sqrt{x}}dx$

(5) $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})dx$

(6) $\int x\cos x\,dx$

(7) $\int x^2e^{-2x}dx$

(8) $\int \sec^3 x\,dx$

(9) $\int \sin(\ln x)dx$

(10) $\int e^{ax}\sin bx\,dx$

(11) $\int \sqrt{a^2-x^2}dx$

(12) $\int (\arcsin x)^2dx$

(13) $\int \frac{\ln\sin x}{\sin^2 x}dx$

(14) $\int x\cos^2 x\,dx$

7. 求下列有理分式的不定积分。

(1) $\int \frac{x+1}{(x-1)^3}dx$

(2) $\int \frac{3x+2}{x(x+1)}dx$

(3) $\int \frac{1}{x^3+1}dx$

(4) $\int \frac{x}{(x+2)(x+3)^2}dx$

(5) $\int \frac{x\,dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$

(6) $\int \frac{2x+2}{(x-1)(x^2+1)^2}dx$

8. 求下列不定积分。

(1) $\int \frac{1}{1+\sin x}dx$　　(2) $\int \frac{1}{1+e^x}dx$

(3) $\int \frac{1}{1+\mathrm{tg}x}dx$　　(4) $\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}dx$

(5) $\int \frac{1}{x^4-1}dx$　　(6) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx$

9. 放射性物质的分解速度 v 是时间 t 的函数 $v=v(t)$，试表示放射性物体由时间 T_0 到 T_1 所分解的质量 m：

(1)用和式表示其近似值；

(2)用定义表示其精确值。

10. 用定积分定义计算 $\int_0^1 x^2dx$。

11. 利用定积分的几何意义，说明下列等式。

(1) $\int_0^1 2xdx=1$　　(2) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin x=0$　　(3) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx$

12. 根据定积分的性质，说明下列积分哪一个较大。

(1) $\int_0^1 x^2dx$ 还是 $\int_0^1 x^2dx$　　(2) $\int_1^2 \ln xdx$ 还是 $\int_1^2(\ln x)^2dx$

13. 根据定积分的性质，估计下列各积分值的范围。

(1) $\int_1^4(x^2+1)dx$　　(2) $\int_0^1 e^{-x^2}dx$　　(3) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi}(1+\sin^2x)dx$

14. 试求函数 $y=\int_0^x \sin xdt$ 当 $x=0$ 及 $x=\frac{\pi}{4}$ 时的导数。

15. 求下列函数的导数。

(1) $\int_0^x 5e^tdt$　　(2) $\int_x^2\sqrt{1+t^2}dt$

(3) $\int_0^{x^2+1}\sin^2tdt$　　(4) $\int_{x^2}^{x^3}\frac{1}{\sqrt{1+t^4}}dt$

16. 求下列极限。

(1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^x \mathrm{arctg}t\,dt}{x^2}$　　(2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_x^0 t^2dt}{\int_0^x t(t-\sin t)dt}$

17. 求函数 $F(x)=\int_0^x te^{-t^2}dt$ 的极值。

18. 计算下列各定积分。

(1) $\int_4^9\sqrt{x}(1+\sqrt{x})dx$　　(2) $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}\frac{dx}{1+x^2}$

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos^3\varphi d\varphi$　　(4) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{tg}^3\theta d\theta$

(5) $\int_0^{\pi}x\cos xdx$　　(6) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\cos xdx$

(7) $\int_{0}^{e-1}\ln(x+1)\mathrm{d}x$　　(8) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{x}{\sin^{2}x}\mathrm{d}x$

(9) $\int_{1}^{2}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[5]{(3-x)^{4}}}$　　(10) $\int_{1}^{e}\frac{1+\ln x}{x}\mathrm{d}x$

(11) $\int_{0}^{2\pi}|\sin x|\mathrm{d}x$　　(12) $\int_{-1}^{1}\frac{x}{\sqrt{5-4x}}\mathrm{d}x$

(13) $\int_{0}^{1}\frac{1}{1+e^{x}}\mathrm{d}x$　　(14) $\int_{0}^{1}\sqrt{(1-x^{2})^{3}}\mathrm{d}x$

(15) $\int_{0}^{2}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^{3}}}$　　(16) $\int_{0}^{a}x^{2}\sqrt{a^{2}-x^{2}}\mathrm{d}x$

19. 当 k,l 为正整数且 $k\neq l$ 时,证明:

(1) $\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{con}kx\ \sin lx\ \mathrm{d}x=0$　(2) $\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos lx\ \mathrm{d}x=0$

(3) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\ \sin lx\ \mathrm{d}x=0$

20. 设函数 $f(x)$是周期为 T 的连续函数,a 为任意实数,则

$$\int_{a}^{a+T}f(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{T}f(x)\mathrm{d}x$$

(提示 $\int_{a}^{a+T}f(x)\mathrm{d}x=\int_{a}^{0}f(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{T}f(x)\mathrm{d}x+\int_{T}^{a+T}f(x)\mathrm{d}x$)

21. 用矩形法或梯形法计算 $\int_{0}^{1}e^{-x^{2}}\mathrm{d}x$ 的近似值。

22. 大多数植物的生长率是以若干天为周期的连续函数。假定一种谷物以

$$g(t)=\sin^{2}(\pi t)$$

的速率生长,其中 t 的单位是天。求在前 10 天内谷物生长的量。

23. 口服药物必须先被吸收进入血液循环,然后才能在机体的不同部位发挥作用。一种典型的吸收率函数具有以下形式:

$$f(t)=kt(t-b)^{2}\qquad 0\leqslant t\leqslant b,$$

其中 k 和 b 是常数。求药物吸收的总量。

24. 求由抛物线 $y=x^{2}-4x+5$,x 轴及直线 $x=3$,$x=5$ 所围成的图形的面积。

25. 求抛物线 $y=-x^{2}+4x-3$ 及其在$(0,-3)$和点$(3,0)$处切线所围成的图形的面积。

26. 求双曲线$\frac{x^{2}}{a^{2}}-\frac{y^{2}}{b^{2}}=1$ 与 $y=b$,$x=0$ 所围成的平面图形绕 y 轴旋转所产生的旋转体的体积。

27. 求由抛物线 $y=x^{2}$、$x=y^{2}$ 所围图形绕 x 轴旋转所成的旋转体的体积。

28. 求由 $x^{2}+(y-5)^{2}=16$ 围成的图形绕 x 轴旋转成的体积。

29. 求曲线$\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ 在$[0,1]$上的弧长。

30. 已知某化学反应的速度为 $v=ake^{-kt}$。其中 a,k 为常数,求时间区间$[0,t]$内的平均速度。

31. 求函数 $y=e^{-x}$在区间$[0,1]$的平均值。

32. 判别下列各广义积分的收敛性，如果收敛，则计算广义积分的值。

(1) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^4}$ (2) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$

(3) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2} dx$ (4) $\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx$

(5) $\int_0^{+\infty} e^{-x} \sin x dx$ (6) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$

(7) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$ (8) $\int_0^2 \frac{dx}{(1 - x)^2}$

33. 当 k 为何值时，积分 $\int_a^b \frac{k}{(x - a)} dx$ $(b > a)$ 收敛？又 k 为何值时发散？

（王艳红　包和平　马建忠）

第四章　多元函数微分学

在前几章中我们已经研究了一元函数的微积分学，其研究的对象都是含有一个自变量的函数。但是在许多科学技术与实际问题当中所遇到的大多是含有多个自变量的多元函数。因此，有必要在一元函数微积分的基础上，来研究多元函数的微分学。

空间解析几何是研究多元函数的基础知识，因此，本章在简单介绍空间解析几何知识的基础之上，重点讨论二元函数微分学，而对二元以上的多元函数仅是简单的扩充。

4.1　多元函数简介

4.1.1　空间解析几何简介

解析几何的特点，就是用代数方法，来研究一些几何图形，解决一些几何问题，也就是在几何和代数之间架上桥梁，把它们沟通起来，而其有力的工具就是坐标法和向量代数，下面简单的加以介绍。

一、空间直角坐标系

在空间任选一点 O，过 O 点作三条互相垂直的轴 Ox,Oy,Oz 和一个测度单位，并按右手法则规定三条坐标轴 Ox,Oy,Oz 的正方向（即将右手的拇指，食指分别指向 Ox,Oy 的正方向，则中指便确定 Oz 的正方向），如图 4-1，这便构成了空间直角坐标系（three dimensional cartesian coordinate system）。

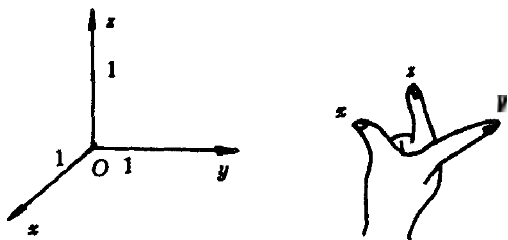


图 4-1

因为每两条坐标轴决定一个坐标面，所以空间直角坐标系有三个坐标面，分别为 xOy、yOz 和 zOx 平面，这三个坐标面又将空间分成 8 个部分，每个部分称为一个卦限（图 4-2），共 8 个卦限（octant）。

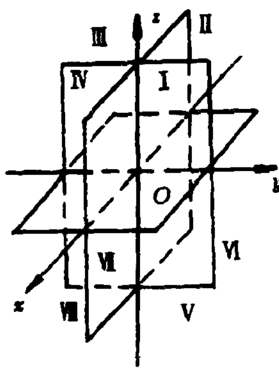


图 4-2

仿平面直角坐标中点与坐标的关系，可建立空间直角坐标系中空间点与有序数组之间的一一对应关系。

设 P 为空间任意一点，过 P 点作三个平面分别与 x、y、z 轴垂直，交点依次为 A、B、C（图 4-3），这三点在 x、y、z 轴上的坐标依次为 x、y、z，于是空间一点 P 就有唯一的一组有序实数（x、y、z）与之对应，反之，任给一组有序实数 (x,y,z) 可依次在 x 轴、y 轴、z 轴上取坐标为 x、y、z 的点 A、B、C，过 A、B、C 分别

作与坐标轴垂直的平面，则三个平面的交点 P 就是有序实数组 (x,y,z) 唯一对应的点，这样就建立了空间点 P 与一组有序实数 (x,y,z) 之间的一一对应关系，称 (x,y,z) 为点 P 空间的直角坐标，记作 $P(x,y,z)$，其中 x、y、z 分别称为点 P 的横坐标，纵坐标，竖坐标。

坐标面和坐标轴上点的坐标各有特征，如 x 轴上任一点的坐标为 $(x,0,0)$，xOy 平面上任意一点的坐标为 $(x,y,0)$，而坐标原点的坐标则为 $(0,0,0)$，相应地，在 yOz 和 zOx 坐标面上的点的坐标分别为 $(0,y,z)$ 和 (x,O,z)。这样有了空间点与坐标的一一对应关系，给我们用代数方法研究空间图形提供了基础。

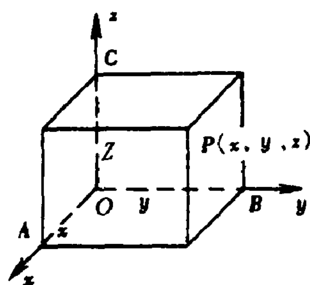


图 4-3

二、空间两点间的距离

在平面直角坐标系中有两点间距离公式，类似地在空间直角坐标系中仍有两点间距离公式。

设 $P_1(x_1\ y_1\ z_1)$ 和 $P_2(x_2\ y_2\ z_2)$ 为空间任意两点，则其距离为

$$|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} \tag{4-1}$$

为证明此公式，可先过 P_1 及 P_2 各作三个平面分别平行于三个坐标面，这样便构成了一个以 P_1P_2 为对角线的长方体(图 4-4)，由图形和勾股定理可得

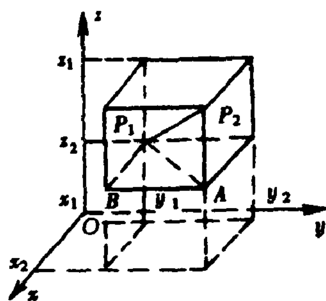


图 4-4

$$|P_1P_2|^2=|P_1A|^2+|AP_2|^2=|P_1B|^2+|BA|^2+|AP_2|^2$$

$$=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2$$

故 $|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$。

例 1 求证以 $P_1(0,5,8)$，$P_2(-2,7,3)$，$P_3(2,3,13)$ 三点为顶点的三角形是等腰三角形。

证： 因 $|P_1P_2|=\sqrt{(-2-0)^2+(7-5)^2+(3-8)^2}$

$$=\sqrt{33}$$

$$|P_1P_3|=\sqrt{(2-0)^2+(3-5)^2+(13-8)^2}$$

$$=\sqrt{33}$$

故 $|P_1P_2|=|P_1P_3|$，所以此三角形为等腰三角形。

三、空间曲面与曲线

建立空间直角坐标系和两点距离公式后，不仅使空间的点与有序数组建立起一一对应的关系，同时可将空间的曲面(包含平面)用含有 x、y、z 的一个方程 $F(x,y,z)=0$ 或 $z=f(x,y)$ 来表示(图 4-5)，即如果在曲面 S 上的点的坐标都满足方程

$$F(x,y,z)=0 \tag{4-2}$$

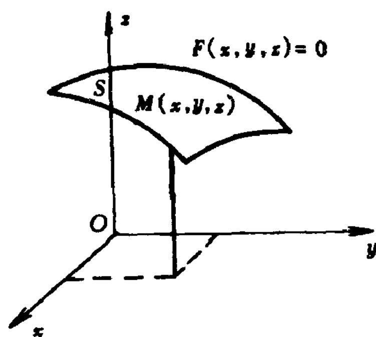


图 4-5

不在曲面上的点的坐标都不满足方程(4-2)，则把方

程(4-2)叫做曲面(S)的方程。

下面介绍几种常见的曲面方程,然后再给出几种简单空间曲线的表示法。

1. 平面方程

空间平面方程的一般形式为

$$Ax+By+Cz+D=0 \tag{4-3}$$

由此式可知,一个平面方程是关于 x、y、z 的一次方程;反之,任一个三元一次方程都表示一个平面,其中 A、B、C 不同时为零,表 4-1 给出了一些常见的空间平面。

表 4-1

方　　程	轨迹特征
$Ax+By+Cz+D=0$	平面的一般方程
$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$	$abc\neq0$ 表示平面的截距式方程
$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$	A、B、C 为平面法线的方向数,$(x_0\ y_0\ z_0)$为平面上一定点
$Ax+By+Cz=0$	过原点的平面
$Ax+By+D=0$	不含 z,表示平行于 z 轴的平面
$Cz+D=0$	不含 x、y,表示平行于 xOy 平面的平面
$z=0$	表示 xOy 坐标平面

2. 用三元二次方程则表示一曲面,我们称它为二次曲面(quadratic surface)

如何通过方程 $F(x,y,z)=0$ 来确定它的图形呢?这不能像平面解析几何那样用描点的方法来作图,一般是通过"平行截口"来看其形状,例如,对于三元二次方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$ 来说,用平行于 xOy 平面的平面(即 $z=h$)去截曲面,得到截口曲线方程为 $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z\\ z=h\end{cases}$, 即 $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=h\\ z=h\end{cases}$,当 $h>0$ 时,得 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=h$ 是椭圆,当 $h=0$ 时,得 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ 是点,当 $h<0$ 时,没有截口,如果用平行于 yOz 平面的平面(即 $x=h$)去截曲面,不论 h 如何,得抛物线 $z=\frac{y^2}{b^2}+\frac{h^2}{a^2}$ 开口向上,用平行于 xOz 平面的平面(即 $y=h$)去截曲面,产生的结果也是抛物线。这种由"俯视"、"主视"、"侧视"合并想象出的 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$ 的图形是椭圆抛物面。一些常见的二次曲面见表 4-2。

表 4-2　一些二次曲面的方程与图形

名　称	方　　程	图　　形
球　面	$x^2+y^2+z^2=R^2$ 球心在 $O(0,0,0)$, 半径为 R	
椭球面	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ a,b,c 为椭球面的半轴	
椭圆抛物面	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=z$ $(a>0,b>0)$	
双曲抛物面	$-\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=z$ $(a>0,b>0)$	
单叶双曲面	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ $(a>0,b>0,c>0)$	

续 表

名称	方程	图形
双叶双曲面	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ $(a>0,b>0,c>0)$	
椭圆柱面	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 当 $a=b$ 时为圆柱面	
双曲柱面	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	
抛物柱面	$x^2-2py=0(p>0)$	
锥面	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ 当 $a=b$ 时为圆锥面	

四、空间曲线方程

两个平面一般相交于一条直线，同样，两个曲面一般相交于一条曲线，所以把两个曲面方程联立起来组成的方程组就是它们交线的方程，即

$$\begin{cases} F_1(x,y,z)=0 \\ F_2(x,y,z)=0 \end{cases}$$

这个方程组叫做空间曲线的一般方程(equation of space curve)。

例 2 方程组 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2 \\ z=o \end{cases}$ 与 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2 \\ x^2+y^2=R^2 \end{cases}$

的交线都是 xOy 平面上的圆周 $x^2+y^2=R^2$，由此可看出表示空间曲线的方程组不是唯一的。

五、向量代数

1. 向量的概念

在物理学、医药学以及其它学科中遇到的量可分为两类：一类是只用数值的大小就可完全表示的量叫做标量(scalar)，如质量、长度等。另一类是用数值的大小和一定的方向才能完全表示的量叫做向量或矢量(vector)，如力、速度、力矩等。

任何向量都能用有向线段来表示，其长度表示向量的大小，其方向表示向量的方向。以 A 为起点，B 为终点的向量记为$\overrightarrow{AB}$，向量常用小写的粗体字母 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 等来表示，向量 $\boldsymbol{a}$ 的大小叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 的模，记为 $|\boldsymbol{a}|$，模为零的向量称为零向量，记为 $\boldsymbol{0}$，它的方向可看做是任意的。

若两个向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的长度相等且方向相同，则称 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 相等，记为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$

在实际问题中遇到的向量往往只考虑它们的大小和方向，而无须考虑它们的位置，这样的向量称为自由向量(free vector)。自由向量可以平行移动到任何位置。以下我们只研究自由向量。

2. 向量的加减法

根据物理学上如力、速度及加速度的合成法则，我们可以定义两个向量的和。

它是指从一点 O 起始，接连作出两个向量 $\overrightarrow{OP_1}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{P_1P}=\boldsymbol{b}$，得一折线 OP_1P，从折线的起点 O 到终点 P 的向量 $\boldsymbol{s}$ 叫做 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，记作

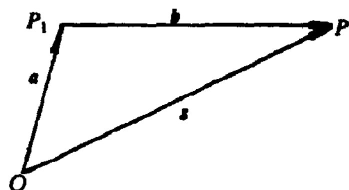


图 4-6

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$$

也就是说 $\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{P_1P}=\overrightarrow{OP}$ (见图 4-6)。

这就是向量加法的三角形法则，它可以推广到有限多个向量相加。

向量加法满足下面基本规律：

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$$

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$$

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a} \quad \boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$$

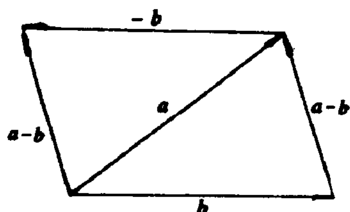


图 4-7

在向量的运算中常用到加法的逆运算，即向量的减法。

从向量 $\boldsymbol{a}$ 减去向量 $\boldsymbol{b}$ 得到的向量差规定为

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$$

即：　减法就是变量加法(见图 4-7)。

3. 向量与数量的乘法

实数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积 $\lambda\boldsymbol{a}$ 仍是一个向量，它的长度是 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$，其中 $\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向当 $\lambda>0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 相同；当 $\lambda<0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 相反。

也就是说 $\lambda\boldsymbol{a}$ 是把 $\boldsymbol{a}$ 伸缩 λ 倍，λ 是正的，就朝着与 $\boldsymbol{a}$ 相同的方向伸展；λ 是负的就表示要反转方向。

长度为 1 的向量叫做单位向量(unit vector)常用 $\boldsymbol{e}$ 来表示，由数乘向量的定义可知，任一个非零向量除上它的模，结果都是一个单位向量即：　$\boldsymbol{e}=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$

数量与向量的乘法适合乘法的交换律、结合律、分配律。

4. 向量的坐标

下面引进向量坐标表示，利用代数运算进一步研究向量的运算。

设已知空间直角坐标系 $O\text{-}xyz$ 中的一点为 $M(x,y,z)$，则由原点 O 与点 M 组成向量 $\overrightarrow{OM}$，如图 4-8，由向量加法得

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$$

将向量 $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$ 叫做向量 $\overrightarrow{OM}$ 在坐标轴上的分向量。

在坐标轴 Ox、Oy、Oz 上以 O 为起点，分别取三个单位向量为 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$，它们称做基本单位向量。则有

$$\overrightarrow{OA}=x\boldsymbol{i}\quad \overrightarrow{OB}=y\boldsymbol{j}\quad \overrightarrow{OC}=z\boldsymbol{k}$$

于是　$\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$

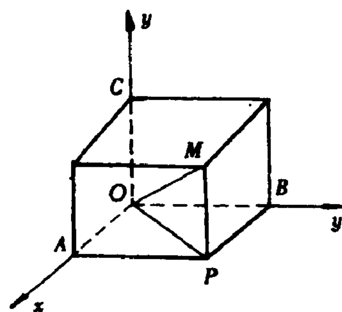


图 4-8

其中 x、y、z 是 $\overrightarrow{OM}$ 在坐标轴上的投影，也是向量 $\overrightarrow{OM}$ 的坐标，所以向量 $\overrightarrow{OM}$ 的坐标表达式可简记为

$$\overrightarrow{OM}=\{x,y,z\}$$

例 3　已知两定点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 和 $M_2(x_2,y_2,z_2)$，求向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的坐标(如图 4-9)。

解：　作向量 $\overrightarrow{OM_1}$、$\overrightarrow{OM_2}$、$\overrightarrow{M_1M_2}$　，则

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}$$

但　$\overrightarrow{OM_2}=\{x_2,y_2,z_2\}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}$

　　$\overrightarrow{OM_1}=\{x_1,y_1,z_1\}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k}$

故　$\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}$

或　$\overrightarrow{M_1M_2}=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}$

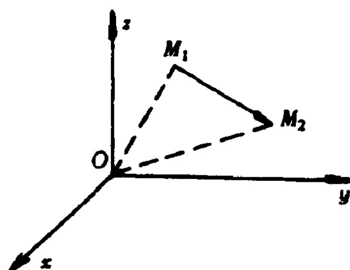


图 4-9

5. 两向量的内积

两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的内积 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 就是它们的长度与夹角余弦的乘积

$$a \cdot b = |a||b|\cos\langle a, b\rangle$$

若其中有一个是零向量,则内积规定为零。

显然,两个向量的内积是一个数,内积 $a \cdot b$ 的正负就表示夹角 $\langle a, b\rangle$ 是锐角还是钝角,内积为零就表示两个向量是垂直的。

设两向量 a、b 的坐标分别为 (x_1, y_1, z_1)、(x_2, y_2, z_2),则两向量内积的坐标计算公式为

$$a \cdot b = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

即:两向量的内积等于它们对应坐标乘积之和。于是两向量垂直的条件为

$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$$

6. 两向量的外积

由两个向量来确定另一个向量的问题,是一种新的运算方式。比如在杠杆定律中,力矩 = 力臂 × 力,我们可以把它作为一种运算,叫做外积,可定义如下:

两个向量 a 与 b 的外积 $a \times b$ 是一个向量,它的长度规定为 $|a \times b| = |a||b|\sin\langle a, b\rangle$ 其中 $a \times b$ 的方向与 a 和 b 都垂直,并且 a、b、$a \times b$ 形成右手系。若 a 和 b 中有一个零向量,则规定外积为零。

设向量的坐标 $a = (x_1, y_1, z_1)$, $b = (x_2, y_2, z_2)$,则外积长度的计算公式为

$$|a \times b| = \sqrt{(y_1z_2 - z_1y_2)^2 + (z_1x_2 - x_1z_2)^2 + (x_1y_2 - y_1x_2)^2}$$

而外积 $a \times b$ 的坐标为

$$(y_1z_2 - z_1y_2, z_1x_2 - x_1z_2, x_1y_2 - y_1x_2)$$

这里应注意:外积是用右旋法则定义的。外积的运算规律基本上有三条:

$$a \times b = -(b \times a)$$

$$(\lambda a) \times b = \lambda(a \times b)$$

$$(a + c) \times b = a \times b + c \times b$$

如果设 i、j、k 是三个互相垂直的基本单位向量,则有

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

例 4 已知 $a = (2,5,7)$, $b = (1,2,4)$ 求 $a \times b$。

解:

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 6i - j - k$$

所以 $a \times b = (6, -1, -1)$

4.1.2 多元函数概念

在许多实际问题和科学试验中遇到的变量往往多于两个。例如病人在进行补液时,补液量 N 与正常血容量 V,正常红细胞比容(单位容积血液中红细胞所占容积百分比)A 及病人红细胞比容 B 的关系为

$$N = V(1 - \frac{A}{B})$$

显然,自变量分别为 A、B、V,而 N 依赖于它们的取值,故要全面研究这类问题,就需要引入多元函数的定义。

【定义 1】 设有三个变量 x、y、z,如果变量 x、y 在允许的区域内任意取定一对值时,变量 z 按着一定的规律总有唯一确定的值与之对应,则变量 z 称为变量 x、y 的二元函数(function of two variables),记作

$$z = f(x, y)$$

其中 x、y 称为自变量,z 称为因变量。

类似地,可以定义三元函数 $u = f(x, y, z)$;以及 n 元函数 $y = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$。二元及二元以上的函数统称为多元函数(multivariate function)。

二元函数 $z = f(x, y)$的自变量 x、y 的允许值范围称为 $z = f(x, y)$的定义域。本书研究的二元函数的定义域通常都是可以用一条或几条直线和曲线所围成的平面区域(domain)。并把围成区域的直线和曲线叫做该区域的边界(frontier),包括边界在内的区域称为闭区域,如果区域延伸到无限远,就称这个区域为无界区域,区域通常用字母 D 表示。

所谓一点的邻域(neigh bourhood)是指以该点(x_0, y_0)为圆心,长度 δ 为半径的圆形区域(不包括圆周),记做 $u\{(x_0, y_0), \delta\}$,它的平面区域是 $\delta < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$,其中$(x, y)$是邻域内的一点。

例 5 求下列函数定义域:

(1)$z_1 = \sqrt{x^2 + y^2}$

(2)$z_2 = \arcsin(x^2 + y^2)$

解: (1)函数 z_1 的定义域是整个 xOy 平面,是无界区域。即

$$D = \{(x, y) \mid -\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty\}$$

(2)函数 z_2 的定义域是在 xOy 平面上,中心在原点,半径为 1 的圆周及其圆内部各点的全体,它是有界闭区域。即

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 1\}$$

例 6 求下列函数定义域:

(1)$z_1 = \frac{\ln x}{\ln y}$

(2)$z_2 = \sqrt{x^2 + y^2 - 1} + \frac{1}{\sqrt{25 - x^2 - 4y^2}}$

解: (1)函数 z_1 的定义域是无界区域,即

$$D = \{(x, y) \mid x > 0, y > 0, \text{且 } y \neq 1\}$$

(2)函数 z_2 的定义域是

$$D = \{(x、y) \mid x^2 + y^2 \geqslant 1, 25 - x^2 - 4y^2 > 0\}$$

即椭圆 $x^2 + 4y^2 = 25$ 内与圆 $x^2 + y^2 = 1$ 外的公共部分,它包括圆周而不包括椭圆上的点集的半开区域。

对于二元函数 $z = f(x, y)$,刻划了三个变量之间的变化规律,其中 x,y 是自变量,它的取值范围在 xOy 平面上的一个区域D,而函数 z 的值在空间与之对应,它的图像在

空间才能表达出来。比如,在区域 D 内任取一点 $P_0(x_0,y_0)$,由二元函数定义,必有唯一确定的值 $z_0=f(x_0,y_0)$ 与之对应,则这三个有序数组就确定了空间一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$,若当点 $P(x,y)$ 在 D 内变化时,由 $z=f(x,y)$ 所确定的对应点 $M(x,y,z)$ 就随之在空间变化,它的轨迹形成一个空间曲面,这就是二元函数 $z=f(x,y)$ 的图形(图 4-10)。所以二元函数 $z=f(x,y)$ 在空间内表示一个曲面。

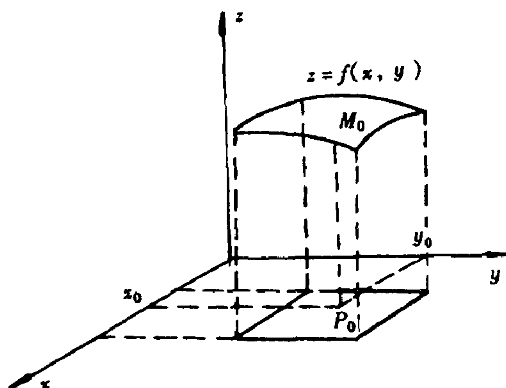


图 4-10

4.1.3 二元函数的极限与连续

在求一元函数 $y=f(x)$ 的极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 时,自变量 x 只在 x 轴上变化,而 $x\to x_0$ 也只能有两种路径,即 $x\to x_0+0$ $x\to x_0-0$,如果左右极限存在且相等,则 $f(x)$ 在点 x_0 处的极限存在,而对于二元函数,在求 $\lim\limits_{P\to P_0}f(x,y)$ 时,点 $P(x,y)$ 在整个 xOy 平面上变化,显然 $P(x,y)\to P_0(x_0,y_0)$ 的路径有任意多个,因此,二元函数的极限概念比一元函数的概念要复杂。

【定义 2】 设二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某一邻域内有定义在 P_0 处可以无定义,如果 $P(x,y)$ 沿任何路径无限趋于定点 $P_0(x_0,y_0)$ 时,函数 $f(x,y)$ 无限趋于一个常数 A,则称 A 是函数 $f(x,y)$ 当 $P(x,y)\to P_0(x_0,y_0)$ 时的极限,记为

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}f(x,y)=A \quad \text{或} \quad \lim_{\rho\to 0}f(x,y)=A$$

其中 $\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$,是指 P 与 P_0 间的距离。

对于该定义,应注意以下两点:

1. 即使当点 $P(x,y)$ 沿着许多特殊的方式趋近于点 P_0 时,对应的函数值都趋近于同一个常数,也不能断定 $\lim\limits_{\rho\to 0}f(x,y)$ 的存在。

2. 当 P 沿着两条不同的曲线趋近于 P_0 时,函数 $f(x,y)$ 趋近于不同的值,则可以断定极限 $\lim\limits_{P\to 0}f(x,y)$ 的不存在。

例 7 证明 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 不存在。

证: 当点 $P(x,y)$ 沿直线 $y=kx$ 趋近于(0,0)时有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\y=kx\to 0}}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2}$$

当 k 取 0,1 时,其极限值分别为 0 和 $\dfrac{1}{2}$,故当 $x\to 0,y\to 0$ 时,该二元函数极限不存在。

例 8 证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}=0,(x,y)\neq(0,0)$。

证: 对于一切的 x、y,恒有

$$(|x|-|y|)^2\geqslant 0$$

即 $$2|xy|\leqslant x^2+y^2$$

所以，$\left|\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}\right|=|x|\dfrac{|xy|}{x^2+y^2}\leqslant\dfrac{1}{2}|x|\leqslant\dfrac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}=\dfrac{1}{2}\rho$

其中 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$，当$(x,y)\to(0,0)$时，$\rho\to 0$。

故 $$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^2+y^2}=0$$

【定义 3】 设二元函数 $z=f(x,y)$满足条件

(1)在点 $P_0(x_0,y_0)$及其邻域有定义；

(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0y_0)}f(x,y)$存在；

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0y_0)}f(x,y)=f(x_0,y_0)$。

则称函数 $z=f(x,y)$在点 $P_0(x_0,y_0)$处连续，否则称函数 $z=f(x,y)$在点 $P_0(x_0,y_0)$处间断。

如果函数 $z=f(x,y)$在其定义域 D 的每一点都连续，则称 $z=f(x,y)$在区域 D 上连续，其函数图形是一个无孔无缝的曲面。

与一元连续函数的某些性质一样，二元函数也具有类似的性质。

1．连续函数的和、差、积、商(分母不为 0)也是连续函数。

2．连续函数的复合函数在它们的定义域中也是连续函数。

3．多元初等函数在其有界闭区域的定义域内连续。

因此，在求函数的极限时，只要是连续函数，就可以运用极限的运算法则去做。

关于二元函数的间断点，是比较复杂的，它可以是平面上一些孤立的点，也可以是一条或几条曲线。

例 9 求下列函数的间断点：

(1) $z_1=\dfrac{xy}{x+y}$　　(2) $z_2=\ln(1-x^2-y^2)$

解：(1)函数 z_1 的间断点是 xOy 平面上的直线 $x+y=0$。

(2)函数 z_2 的间断点在实数范围内是 xOy 平面上圆周　$x^2+y^2=1$　的点集。函数定义域 $D=\{(x,y)|1>x^2+y^2\}$。

例 10 求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}$。

解：
$$\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\frac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}=\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\frac{xy+1-1}{(\sqrt{xy+1}+1)\cdot xy}$$
$$=\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\frac{1}{\sqrt{xy+1}+1}=\frac{1}{2}$$

4.2　偏导数与全微分

4.2.1　偏导数的概念及计算

类仿一元函数中的导数是函数在某一点处变化率的研究，我们研究二元函数 $z=$

$f(x,y)$分别对自变量 x、y 的变化率问题,那就是偏导数。

【定义4】 设函数 $z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)及其邻域内有定义,当 y 固定在y_0,而给 x 以增量 Δx 时,相应地函数有增量

$$f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0y_0)$$

称其为函数在点(x_0,y_0)处对 x 的偏增量,当 $\Delta x\to 0$ 时,如果极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

存在,则称此极限值为函数 $z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处对 x 的偏导数(partial derivatives),记为

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} \quad 或 \quad f'_x(x_0,y_0) \quad 或 \quad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} \quad 或 \quad z'_x(x_0,y_0)$$

同样可以定义函数 $z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处对 y 的偏导数,记为

$$z'_y(x_0,y_0)=\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}=\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}=f'_y(x_0,y_0)$$

$$=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

同理,把一点的偏导数的概念推广到三元以上的多元函数,例如,三元函数 $u=f(x,y,z)$在(x_0,y_0,z_0)处对 x 的偏导数定义为

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0,z_0)-f(x_0,y_0,z_0)}{\Delta x}$$

如果函数 $z=f(x,y)$在区域 D 内每一点(x,y)处对 x 的偏导数都存在,那么 $f'_x(x,y)$仍是 x、y 的函数,称为 $z=f(x,y)$为 x 的偏导函数,记作$\frac{\partial z}{\partial x}$、$\frac{\partial f}{\partial x}$、$z'_x(x,y)$或 $f_x'(x,y)$。类似地有函数 $z=f(x,y)$对 y 的偏导数,记为$\frac{\partial z}{\partial y}$、$\frac{\partial f}{\partial y}$、$z'_y(x,y)$或 $f_y'(x,y)$。

由偏导函数概念知道,$f'x(x_0,y_0)$是(x_0,y_0)处的偏导数值,而 $f'_x(x,y)$,是在区域 D 内的偏导函数,注意区分这两个不同的概念。$f'_y(x_0,y_0)$与 $f'_y(x,y)$也类似。以后在不至混淆的情况下把偏导函数简称为偏导数。

一、偏导数的求法

求 $z=f(x,y)$的偏导数,并不需要用新的方法,因为其中的一个自变量被看做是固定的,只有另一个自变量在变动,所以它仍旧是一元函数的微分法问题,具体地,求$\frac{\partial f}{\partial x}$时,只要把 y 暂时看做常量,而对 x 求导数;求$\frac{\partial f}{\partial y}$时,则只要把 x 暂时看做常量而对 y 求导数。

例11 求 $z=x^2+3xy+y^2$ 在点$(1,1)$处的偏导数。

解: $\frac{\partial z}{\partial x}=f_x'(x,y)=2x+3y,\quad f_x'(1,1)=5$

$\frac{\partial z}{\partial y}=f_y'(x,y)=3x+2y\quad f_y'(1,1)=5$

例 12 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & \text{当 } x^2+y^2\neq 0\\ 0, & \text{当 } x=y=0\end{cases}$，求 $f_x'(0,0)$。

解： 求分段函数在分段点的偏导数时，必须用定义求。

$$f_x'(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{2\Delta x\cdot 0}{(\Delta x)^2+0}-0}{\Delta x}=0$$

例 13 求 $\gamma=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 的偏导数。

解： 把 y 和 z 看做常量，则有

$$\frac{\partial\gamma}{\partial x}=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{x}{\gamma}$$

同理有 $\dfrac{\partial\gamma}{\partial y}=\dfrac{y}{\gamma},\dfrac{\partial\gamma}{\partial z}=\dfrac{z}{\gamma}$。

二、偏导数的几何意义

我们知道，二元函数 $z=f(x,y)$ 的图形是空间的一个曲面，设点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 是曲面上一定点，当固定 $y=y_0$ 时，即用平面 $y=y_0$ 截此曲面，得到一条空间曲线 AM_0B（图 4-11）：

$$\begin{cases}z=f(x,y)\\ y=y_0\end{cases}$$

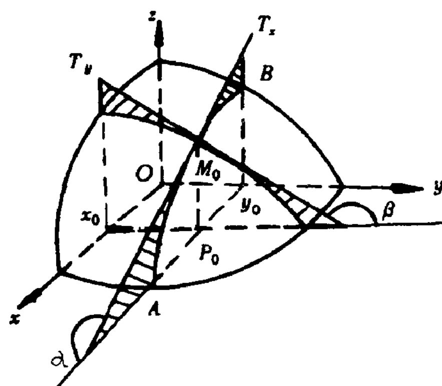


图 4-11

在 $y=y_0$ 平面内，z 是 x 的一元函数，而 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}=f_x'(x_0y_0)$ 就是这条曲线在点 M_0 的切线 M_0T_x 的斜率 $\operatorname{tg}\alpha$，同时 M_0T_x 也是曲面 $z=f(x,y)$ 在点 M_0 沿 x 轴正向的切线，因此，偏导数 $f_x'(x_0,y_0)$ 是曲面在点 M_0 沿 x 轴正向的切线斜率。

同理，偏导数 $f_y'(x_0,y_0)$ 是曲面在点 M_0 沿 y 轴正向的切线斜率 $\operatorname{tg}\beta$。

我们知道，如果一元函数在某点具有导数，则它在该点必定连续，但对于多元函数来说，即使各偏导数在某点都存在，也不能保证函数在该点连续，这是因为各偏导数存在，只能保证点 $P(x,y)$ 沿着平行于坐标轴的方向趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 时，函数值 $f(x,y)$ 趋于 $f(x_0,y_0)$，但不能保证点 P 按任何方向趋于 P_0 时，函数值 $f(x,y)$ 都趋于 $f(x_0,y_0)$。

4.2.2 全微分

前面讲的偏导数，是函数沿两轴的变化率，但有时还需研究多元函数的全面变化情况。

设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 的某邻域内有定义，给 x 以增量 Δx，同时给 y 以增量 Δy，则 $\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$，称为函数 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 的全增量(total increment)。

与一元函数一样，也希望用自变量的增量 Δx、Δy 的线性组合来近似地代替函数的全增量，即令

$$\Delta z=A\cdot\Delta x+B\cdot\Delta y+o(\rho)$$

其中 A、B 是与点 (x,y) 有关的待定系数，而与 Δx, Δy 无关，$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$ 是 Δx、Δy 的高阶无穷小，下面关键的问题是确定 A、B。

上式对于一切的 Δx、Δy 都是成立的，显然对 $\Delta y=0$ 也成立，于是

$$\Delta z=A\Delta x+o(\rho)\quad 即\frac{\Delta z}{\Delta x}=A+\frac{o(\rho)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[A+\frac{o(\rho)}{\Delta x}\right]=A\ (其中\ \rho=\Delta x)$$

因此，$\dfrac{\partial z}{\partial x}=A$。同理 $B=\dfrac{\partial z}{\partial y}$。

于是 $\quad \Delta z=\dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\Delta x+\dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\Delta y+o(\rho)$

那么 $\quad \dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\Delta x+\dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\Delta y$ 就是 Δz 的线性主部。

与一元函数一样，二元函数里也有 $dx=\Delta x$, $dy=\Delta y$，从而有下面的定义：

【定义 5】 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 具有偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$、$\dfrac{\partial z}{\partial y}$，当自变量 x、y 各给以增量 Δx 和 Δy 时，则对应的函数全增量

$$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$$

可表示为

$$\Delta z=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy+o(\rho)$$

其中 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，则称函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微，并把 Δz 的线性主部 $\dfrac{\partial z}{\partial x}dx+\dfrac{\partial z}{\partial y}dy$ 称为函数 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 处的全微分(total differential)，记作

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$$

三元乃至更多元的函数的全微分，可作类似的定义。如三元函数 $u=f(x,y,z)$ 的全微分公式为

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz$$

由定义 5 知道，如果多元函数在一点可微，显然函数在该点全微分存在；如果在区域内每一点都存在可微，则称函数在该区域内可微。当然在这个区域内全微分存在了。

另外，在一元函数中，函数 $f(x)$ 在某一点可微，函数一定可导，反之亦成立。可是多元函数的可微与偏导数的情况就不相同了，函数 $z=f(x,y)$ 在一点 (x,y) 可微，其偏导数在该点一定存在，反之却不一定成立。从直观上来解释，这是因为函数 $z=f(x,y)$ 在一点可微，几何上反应在该点存在切平面，而偏导数在一点存在，仅说明在该点有 x 轴方向和 y 轴方向两条切线存在。偏导数存在是可微的必要条件，不是充分条件，再附加一定

条件可得到充分条件。

【定理 1】 若函数 $z=f(x,y)$ 的偏导数 $f_x'(x,y)$、$f_y'(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 连续，则函数 $z=f(x,y)$ 在该点 P 处可微(证明略)。

例 14 求函数 $z=x^2y+y^2$ 的全微分。

解： 因为 $\frac{\partial z}{\partial x}=2xy,\frac{\partial z}{\partial y}=x^2+2y$

所以
$$dz=2xydx+(x^2+2y)dy$$

例 15 求函数 $u=x+\sin\frac{y}{2}+e^{yz}$ 的全微分。

解： 因为 $\frac{\partial u}{\partial x}=1,\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{2}\cos\frac{y}{2}+ze^{yz}\frac{\partial u}{\partial z}=ye^{yz}$

所以
$$dz=dx+(\frac{1}{2}\cos\frac{y}{2}+ze^{yz})dy+ye^{yz}dz$$

4.2.3 高阶偏导数

二元函数 $z=f(x,y)$ 的偏导数 $f_x'(x,y)$、$f_y'(x,y)$ 一般仍为 x、y 的函数。如果它们的偏导数也存在，则称这些偏导数为 $z=f(x,y)$ 的二阶偏导数。二阶偏导数共有 4 个，分别记作：

$$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial x})=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''_{xx}(x,y)=z''_{xx}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial x})=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f''_{xy}(x,y)=z''_{xy}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial y})=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f''_{yx}(x,y)=z''_{yx}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial y})=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''_{yy}(x,y)=z''_{yy}$$

其中 $f''_{xy}(x,y)$ 和 $f''_{yx}(x,y)$ 称为二阶混合偏导数。

类似地可定义更高阶的偏导数。

例 16 求 $z=e^x\sin y$ 的二阶偏导数。

解：
$$\frac{\partial z}{\partial x}=e^x\sin y,\ \frac{\partial z}{\partial y}=e^x\cos y$$
$$f''_{xx}=e^x\sin y,\ f''_{yy}=-e^x\sin y$$
$$f''_{xy}=e^x\cos y,\ f''_{yx}=e^x\cos y$$

对于二阶混合偏导数有下面定理：

【定理 2】 如果 $z=f(x,y)$ 的二阶混合偏导数 $f''_{xy}(x,y)$ 与 $f''_{yx}(x,y)$ 在区域 D 内连续，则在该区域内必相等(证明略)。

例 17 验证函数 $z=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ 满足方程
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

证： 因为 $z=\ln\sqrt{x^2+y^2}=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$

所以
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{x^2+y^2},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{x^2+y^2}$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{(x^2+y^2)-x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{(x^2+y^2)-y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$
所以
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

例 18 证明函数 $u=\frac{1}{r}$,满足方程
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$
其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$。

证: $\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}=-\frac{1}{r^2}\cdot\frac{x}{r}=-\frac{x}{r^3}$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{r^3-x\cdot 3r^2\cdot\frac{\partial r}{\partial x}}{(r^3)^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3x}{r^4}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}$$
$$=-\frac{1}{r^3}+\frac{3x^2}{r^5}$$
由于函数关于自变量的对称性,所以有
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3y^2}{r^5},\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3z^2}{r^5}$$
所以 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\frac{3}{r^3}+\frac{3(x^2+y^2+z^2)}{r^5}=-\frac{3}{r^3}+\frac{3r^2}{r^5}=0$。命题得证。

上面两例中的两个方程都称为拉普拉斯方程,它在数理方程中起着很重要的作用。

4.3 多元复合函数的求导法则

4.3.1 复合函数的求导法则

设函数 $u=\varphi(x,y),v=\varphi(x,y)$,且 $z=f(u,v)$则称 $z=f[\varphi(x,y),\psi(x,y)]$是通过中间变量 u、v 关于x、y 的二元复合函数。

【定理 3】 设函数 $u=\varphi(x,y),v=\psi(x,y)$在点$(x,y)$处有连续偏导数,函数 $z=f(u,v)$在对应点(u,v)处有连续偏导数,则复合函数

$z=f[\varphi(x,y),\psi(x,y)]$对 x 及 y 的偏导数存在且有
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} \tag{4-4}$$

证:给 x 以改变量 $\Delta x(\Delta x\neq 0)$,让 y 保持不变,则相应的 u、v 的改变量为

$\Delta u_x=\varphi(x+\Delta x,y)-\varphi(x,y)$;$\Delta v_x=\psi(x+\Delta x,y)-\psi(x,y)$,从而函数

$z=f(u,v)$相应的改变量为

$$\Delta z_x = f(u+\Delta u_x, v+\Delta v_x) - f(x,v)$$

由定理 1 知 $f(u,v)$是可微的,因此,

$$\Delta z_x = \frac{\partial z}{\partial u}\Delta u_x + \frac{\partial z}{\partial v}\Delta v_x + o(\rho)\text{,其中 } \rho=\sqrt{(\Delta u_x)^2+(\Delta v_x)^2} \text{ 且 } \lim_{\rho\to 0}\frac{o(\rho)}{\rho}=0\text{。}$$

将上式两边同时除以 Δx,再取极限 $\Delta x\to 0$,得

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta z_x}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial u}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u_x}{\Delta x} + \frac{\partial z}{\partial v}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v_x}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0}\frac{o(\rho)}{\Delta x}$$

又因为 $u=\varphi(x,y)$,$v=\psi(x,y)$有连续的偏导数,所以 $\Delta x\to 0$ 时,$\Delta u_x\to 0$,$\Delta v_x\to 0$,且有 $\rho\to 0$。于是

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{o(\rho)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{o(\rho)}{\rho}\cdot\frac{\rho}{\Delta x} = \lim_{\rho\to 0}\frac{o(\rho)}{\rho}\lim_{\Delta x\to 0}\sqrt{\left(\frac{\Delta u_x}{\Delta x}\right)^2+\left(\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)^2} = 0\cdot\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2} = 0$$

因此 $\quad \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}$,

同理可证 $\quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y}$。

关于自变量或中间变量多于两个的情形,也有类似的结果。

特殊地,如果 $z=f(u,v)$,而 $u=\varphi(x)$ $v=\psi(x)$,则复合函数 z 是 x 的一元函数,即

$$z=f[\varphi(x),\psi(x)]$$

由于 x 的变化引起$\varphi(x)$、$\psi(x)$的变化,因而函数对 x 的变化率是全部变化率,故叫做全导数。即 z 对 x 的导数称为全导数,则

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} \tag{4-5}$$

如果 $z=f(x,y)$,而 $y=\varphi(x)$,则复合函数 $z=f[x,\varphi(x)]$的全导数为

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

其中$\dfrac{\partial z}{\partial x}$是$f(x,\varphi(x))$对 x 的偏导数,是函数的部分(仅是对 x,不对 y)变化率,而$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$是函数的全部(只有一个变量)变化率,这就是$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$与$\dfrac{\partial z}{\partial x}$的区别。

例 19 设 $z=u\ln v$,而 $u=x^2+y^2$,$v=xy$,求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$,$\dfrac{\partial z}{\partial y}$。

解:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\\ &= \ln v\cdot 2x + \frac{u}{v}\cdot y\\ &= 2x\ln(xy) + \frac{x^2+y^2}{xy}\cdot y\\ &= 2x\ln(xy) + \frac{x^2+y^2}{x}\end{aligned}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \ln v\cdot 2y + \frac{u}{v}\cdot x$$

$$=2y\cdot\ln(xy)+\frac{x^2+y^2}{xy}\cdot x$$
$$=2y\ln(xy)+\frac{x^2+y^2}{y}$$

例 20 设 $z=\mathrm{tg}(3t+2x^2-y)$，$x=\frac{1}{t}$，$y=\sqrt{t}$，求$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$。

解： $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial z}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$

$$=3\sec^2(3t+2x^2-y)+\sec^2(3t+2x^2-y)\cdot$$
$$4x\left(-\frac{1}{t^2}\right)+\left(\frac{-1}{2\sqrt{t}}\right)\sec^2(3t+2x^2-y)$$
$$=\left(3-\frac{4}{t^3}-\frac{1}{2\sqrt{t}}\right)\sec^2\left(3t+\frac{2}{t^2}-\sqrt{t}\right)$$

例 21 设 $z=uv+\mathrm{e}^t$，而 $u=\sin t$，$v=\cos t$，求全导数$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$。

解： $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial z}{\partial t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t}$

$$=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial z}{\partial t}$$
$$=v\cos t+u(-\sin t)+\mathrm{e}^t$$
$$=\cos^2t-\sin^2t+\mathrm{e}^t$$

4.3.2 隐函数的求导法则

对于一元函数，$y=\varphi(x)$是由方程 $F(x,y)=0$ 所确定的隐函数，已经讨论过隐函数的求导方法，这里用偏导数的概念推导隐函数的求导公式。

【定理 4】 设函数 $F(x,y)$在点 $P(x_0,y_0)$的某一个邻域内具有连续的偏导数，且 $F(x_0,y_0)=0$，$Fy'(x_0,y_0)\neq0$，则方程 $F(x,y)=0$ 在点(x_0,y_0)的某一邻域内总能唯一确定一个单值连续且具有连续导数的函数 $y=f(x)$，它满足条件

$$y_0=f(x_0)$$

并有
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F'_x}{F'_y}$$

对于该定理只作简单推导。

设 $F(x,y)=0$，且令 $y=f(x)$，(不论它能否从方程中解出)，于是 $F[x,f(x)]\equiv0$，对等式两边求全导数得

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0\qquad 由于\ \frac{\partial F}{\partial y}\neq0$$

故有
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{-F_x'}{F_y'}$$

例 22 求隐函数 $\sin y+\mathrm{e}^x-xy^2=0$ 的导数。

解： 令 $F(x,y)=\sin y+\mathrm{e}^x-xy^2$，则

$$F'_x=\mathrm{e}^x-y^2,\ F'_y=\cos y-2xy$$

所以
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x'}{F_y'}=\frac{y^2-\mathrm{e}^x}{\cos y-2xy}$$

仿一元函数,若存在二元函数 $z=f(x,y)$,它满足方程 $F(x,y,z)=0$,即

$$F[x,y,f(x,y)]=0$$

则称二元函数 $z=f(x,y)$ 是由方程 $F(x,y,z)=0$ 所确定的隐函数。

定理 4 可以推广到二元隐函数 $z=f(x,y)$ 的求导公式。

【定理 5】 设函数 $F(x,y,z)$ 在点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 的某一邻域内具有连续的偏导数,且 $F(x_0,y_0,z_0)=0$, $F'_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$,则方程 $F(x,y,z)=0$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 的某一邻域内总能唯一确定一个单值连续且具有连续偏导数的函数 $z=f(x,y)$ 它满足条件 $z_0=f(x_0,y_0)$,并有 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x'}{F_z'}$,

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'}{F_z'}$$

该定理也可简单推导。

因为 $F[x,y,f(x,y)]\equiv 0$,对上式两边分别对 x 和 y 求导,用复合函数求导法则得

$$F_x'+F_z'\frac{\partial z}{\partial x}=0$$

$$F_y'+F_z'\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

由于 F_z' 连续,且 $F_z'(x_0\ y_0\ z_0)\neq 0$,所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'}{F_z'},\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'}{F_z'}$$

例 23 设 $e^z-xyz=0$,求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$。

解: 令 $F=e^z-xyz$,则

$$F'_x=-yz,\quad F'_y=-xz,\quad F'_z=e^z-xy$$

当 $F_z'\neq 0$ 时, $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F'_x}{F'_z}=\dfrac{yz}{e^z-xy}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{-F'_y}{F'_z}=\dfrac{xz}{e^z-xy}$

例 24 设 $x^2+y^2+z^2-4z=0$,求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$。

解: 设 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-4z$,则

$$F'_x=2x,\quad F'_z=2z-4$$

应用定理得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{2-z}$$

所以

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{(2-z)+x\cdot\frac{\partial z}{\partial x}}{(2-z)^2}=\frac{(2-z)+x\cdot\frac{x}{2-z}}{(2-z)^2}=\frac{(2-z)^2+x^2}{(2-z)^3}$$

4.4 多元函数的极值

4.4.1 二元函数极值定义

【定义 6】 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某个邻域内有定义,对于点 (x_0,y_0) 邻域的其他各点 (x,y),如果恒有 $f(x,y)<f(x_0\ y_0)$,则称函数在点 (x_0,y_0) 有极大值

$f(x_0,y_0)$。如果恒有 $f(x,y)>f(x_0,y_0)$，则称函数在点(x_0,y_0)取得极小值。极大值与极小值统称为极值。使函数取得极值的点称为极值点。

例如，函数 $z=2x^2+3y^2$，在点(0,0)处取得极小值为 0，见图 4.12(a)，而函数 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$在点(0,0)处取得极大值为 1，见图 4.12(b)。

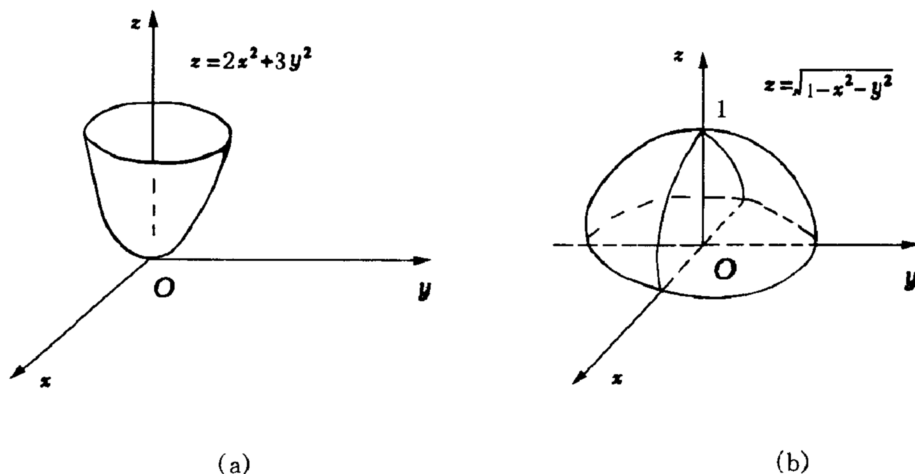


图 4.12

4.4.2 二元函数的极值定理

二元函数的极值可利用偏导数来解决，下面给出解决该问题的两个定理。

【定理 6】 (极值存在的必要条件)设函数 $z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)有极值，并且在该点处两个一阶偏导数存在。则 $f_x'(x_0,y_0)=0$ 且 $f_y'(x_0,y_0)=0$。

对于该定理只给出简单证明：

证： 因为 $z=f(x,y)$在点 $P_0(x_0,y_0)$取得极值，则固定 $y=y_0$，$z=f(x,y_0)$也取得极值，由一元函数极值的必要条件，在点 $P_0(x_0,y_0)$处必有 $f'_x(x_0,y_0)=0$。

同理，$f'_y(x_0,y_0)=0$。证毕。

和一元函数一样，我们把使 $f'_x(x_0,y_0)=0$ 且 $f'_y(x_0,y_0)=0$ 同时成立的点，称为二元函数 $z=f(x,y)$的驻点，由定理可知，可微函数的极值点一定是驻点，但驻点不一定是极值点。

例如，函数 $z=xy$，(0,0)点是它的驻点，但函数在该点无极值。

【定理 7】 (极值存在的充分条件)设函数 $z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)的某一邻域内连续，且有一阶及二阶连续偏导数，又

$$f'_x(x_0,y_0)=0,\quad f'_y(x_0,y_0)=0$$

如果令 $f''_{xx}(x_0,y_0)=A$，$f''_{xy}(x_0,y_0)=B$，$f''_{yy}(x_0,y_0)=C$，则有(1)当 $B^2-AC<0$ 时，函数在点(x_0,y_0)有极值，且当 $A<0$ 时为极大值，当 $A>0$ 时为极小值。

(2)当 $B^2-AC>0$ 时，函数 $z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)没有极值。

(3)当 $B^2-AC=0$ 时，函数在点(x_0,y_0)可能有极值，也可能无极值。

(证明从略。)

4.4.3 求极值的方法

由上述两个定理，可以给出求二元函数极值的一般方法。

1. 求函数 $z=f(x,y)$ 的一阶及二阶偏导数。

2. 令 $\begin{cases} f'_x(x,y)=0 \\ f'_y(x,y)=0 \end{cases}$

解该方程组得的实数解即为所求的驻点。

3. 对每个驻点，求出相应的 A、B、C 的值并用极值存在的充分条件，判定各驻点是否为极值点。

4. 求出每个极值点的函数值，即极值。

例 25 求函数 $f(x,y)=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$ 的极值。

解： 解方程组

$$\begin{cases} f'_x(x,y)=3x^2+6x-9=0 \\ f'_y(x,y)=-3y^2+6y=0 \end{cases}$$

得驻点为 $(1,0),(1,2),(-3,0),(-3,2)$。

又因为 $f''_{xx}=6x+6$， $f''_{xy}=0$， $f''_{yy}=-6y+6$

则在点 $(1,0)$，$A=12,B=0,C=6,B^2-AC<0$，函数有极小值，$f_{\min}=-5$。

在点 $(1,2)$，$A=12,B=0,C=-6,B^2-AC>0$ 函数无极值。

在点 $(-3,0)$，$A=-12,B=0,C=6,B^2-AC>0$，函数无极值。

在点 $(-3,2)$，$A=-12,B=0,C=-6,B^2-AC<0$，而且 $A=-12<0$ 函数有极大值，$f_{\max}=31$。

综上所述，二元函数极值是反映局部特点的概念，而最大值和最小值是反映全局特点的，求二元函数的最大、最小值问题是较复杂的，但在许多实际问题中，往往可以根据具体意义，作出判断即可。如果要断定可微函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内一定能取得最大值或最小值，只要知道函数在 D 内只有一个驻点，则可以认定在该点处的函数值必为 $z=f(x,y)$ 在 D 内的最大值或最小值。

例 26 要建造一容积为 18 立方米的长方形水箱，已知侧面积与底面积的单位造价之比为 3:4，问水箱的尺寸如何才能使费用最省？

解： 设水箱长为 x 米，宽为 y 米，因为容积为 18 立方米，可知水箱高为 $\frac{18}{xy}$

设侧面积和底面积的单位造价分别为 $3k$，$4k$，则水箱的造价为

$$\begin{aligned} z &= 3k\cdot 2(x+y)\frac{18}{xy}+4kxy \\ &= 6\times 18k\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+4kxy \end{aligned}$$

显然，$z=f(x,y)$，x、y 怎样选择，z 才能最小？

由定理有 $\frac{\partial z}{\partial x}=6\times 18k\left(-\frac{1}{x^2}\right)+4ky=0$

$\frac{\partial z}{\partial y}=6\times 18k\left(-\frac{1}{y^2}\right)+4kx=0$

解方程组

$$\begin{cases} x^2y=27 \\ xy^2=27 \end{cases} \quad 得 \quad \begin{cases} x=3 \\ y=3 \end{cases}$$

故由实际意义可知最小值确实存在。即当 $x=3,y=3$,高 $=2$ 时,费用最省。

4.4.4 线性最小二乘法

在许多经济分析或科学试验当中获得许多数据,根据这些数据对各个变量建立相依变化关系。而这种关系一般地用方程给出,称其为经验公式。而建立经验公式最常用的方法就是最小二乘法。下面我们用两个变量有线性关系的情形来说明。

对于某一对变量 x 与 y,下面我们建立它们的相依关系。由此对它进行了 n 次测量,得到 n 对数据:$(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$。将这些数据看作直角坐标系 xOy 中的点的坐标,即 $A_1(x_1,y_1),A_2(x_2,y_2),\cdots,A_n(x_n,y_n)$(见图 4-13)。

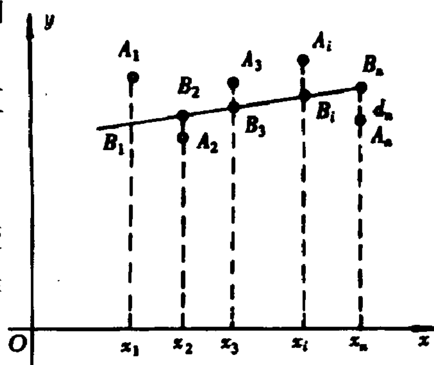


图 4-13

若这些点几乎分布在一条直线上,我们就认为变量 x 与 y 之间存在着线性关系。可以设其关系方程为

$$y=ax+b \tag{4-6}$$

其中 a 与 b 为待定参数。

设在直线上与点 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$,横坐标相同的点为

$$B_1(x_1,ax_1+b)$$
$$B_2(x_2,ax_2+b)$$
$$\vdots$$
$$B_n(x_n,ax_n+b)$$

A_i 与 $B_i(i=1,2,\cdots,n)$的距离

$$d_i=|ax_i+b-y_i|$$

就称做实测值与理论值的误差。现在关键问题要求一组数 a 与 b,使误差的平方和

$$S=\sum_{i=1}^{n}(ax_i+b-y_i)^2$$

为最小,S 值越小,说明直线与 n 个数据点的吻合程度越好,把这种以偏差平方和 S 最小为条件,求出参数而确定经验公式的方法称为最小二乘法。

由二元可微函数极值存在的必要条件可知

$$\frac{\partial S}{\partial a}=2\sum_{i=1}^{n}(ax_i+b-y_i)x_i=0$$

$$\frac{\partial S}{\partial b}=2\sum_{i=1}^{n}(ax_i+b-y_i)=0$$

将上式整理得出关于 a、b 的方程组

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + nb = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases}$$

该方程组一般地称做正规方程组,解此方程组可得

$$\begin{cases} a = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \dfrac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n} x_i)(\sum_{i=1}^{n} y_i)}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \dfrac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2} \\ b = \dfrac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n} y_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i) \end{cases}$$

将 a 与 b 代入方程(1)中,便得到所求的直线型经验公式。

例 27 对两个有线性关联的变量 x、y 进行测量,得到数据如下:

x	−2	0	1	2	4	
y	0.5	1	1.5	2	3	

试建立 $y=f(x)$的经验公式。

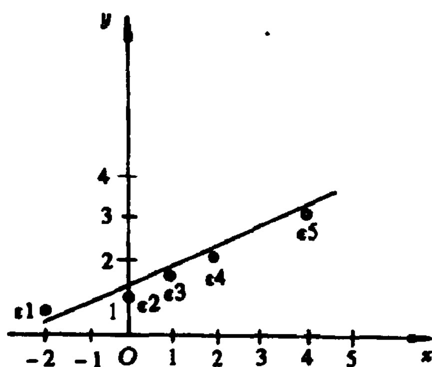


图 4-14

解: 将表中 5 组数据描点如图 4-14,发现它们大致呈直线分布趋势,故宜用直线型经验公式,设此直线方程为

$$y=ax+b$$

下面按照公式依次计算 a 和 b 的值

这时有 $\sum_{i=1}^{5} x_i = 5, \sum_{i=1}^{5} y_i = 8, \sum_{i=1}^{5} x_i^2 = 25,$

$$\sum_{i=1}^{5} x_i y_i = 16.5$$

把它们分别代入公式中得

$$a=\frac{16.5-\dfrac{1}{5}\times5\times8}{25-\dfrac{1}{5}\times5^2}=0.425$$

$$b=\frac{8}{5}-0.425\times\frac{5}{5}=1.175$$

故经验公式为 $y=0.425x+1.175$。

小　　结

二元函数是在一元函数的基础之上发展起来的,从一元函数到二元函数出现了一些新的概念和方法,而从二元到多元则是一种简单的扩充。因此,我们主要是以二元函数为代表,来讨论多元函数的性质。

对于本章，我们主要应掌握一些基本概念，同时，要掌握偏导数、全微分、复合函数、隐函数的微分法及其计算，这是多元函数微分学的基本功。

并且，在学习时应注意要用同一元函数类比的方法，来研究二元函数乃至更多元函数的概念及性质，比较它们的相同之处，同时注意它们还有各自的特殊性。

在本章最后，要掌握用极值方法处理实际问题的能力。

习　　题

1. 求下列函数的定义域。

(1) $z=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{y^2-1}$

(2) $u=\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}+\frac{1}{\sqrt{z}}$

(3) $z=\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$

(4) $z=\ln(y^2-4x+8)$

2. 求函数 $z=\ln(1+x^2-y^2)$ 的不连续区域。

3. 求下列函数的极限。

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$

(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(x,y)}{y}$

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2-y^2}{x^4-y^4}$

4. 求下列函数的偏导数。

(1) $z=e^{2x}\sin y$　　(2) $z=x^y$　　(3) $z=\ln(x+\ln y)$

(4) $z=\arcsin(y\sqrt{x})$　　(5) $u=x^{\frac{y}{z}}$

5. 求下列函数在给定点的偏导数。

(1) $z=\sin(2x+y)$ 在点 $(\pi,\frac{\pi}{6})$

(2) $z=(1+xy)^y$ 在点 $(1,2)$

6. 设 $z=\ln(\sqrt{x}+\sqrt{y})$，求证：$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2}$。

7. 设 $z=\int_y^x e^{-t^2}dt$，求证：$\frac{\partial z}{\partial x}\cdot(-\frac{\partial z}{\partial y})=e^{-x^2-y^2}$。

8. 求下列函数的高阶偏导数。

(1) $z=3\ln(x^2+y^2)$

(2) $z=\sin(x+2y)$

(3) $u=xy+yz+zx$

9. 验证函数 $z=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$，其中 $x=u+v$　　$y=u-v$，满足关系式：

$$\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{u-v}{u^2+v^2}$$

10. 求下列多元复合函数的导数。

(1) $z=\frac{v}{u}$,而 $u=e^{t}\quad v=1-e^{2t}$,求$\frac{dz}{dt}$

(2) $z=u^{2}\ln v$,而 $u=\frac{x}{y}$,$v=3x-2y$ 求$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$

(3) $z=e^{x-2y}$,而 $x=\sin t$,$y=t^{3}$,求$\frac{dz}{dt}$

(4) $z=f(\frac{x}{y},x)$,求$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$

11. 求下列函数的全微分。

(1) $z=x^{2}+xy^{2}+\sin y$

(2) $z=\arcsin\frac{x}{y}$

(3) $z=\frac{e^{xy}}{e^{x}+e^{y}}$

12. 在半径为 a 的半球内,内接一长方体,问各边长多少时,其体积为最大?

13. 在底半径为 r、高为 h 的正圆锥内,内接一个体积最大的长方体,问这长方体的长、宽、高各为多少?

14. 求下列函数的极值。

(1) $z=x^{2}+xy+y^{2}+x-y+1$

(2) $z=xy(a-x-y)$

15. 求函数 $z=xy$ 在满足条件 $x+y=1$ 的极值。

16. 求函数 $z=x^{2}+y^{2}$ 在满足条件$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 的极值。

(郭淑霞 赵玉荣 马建忠)

第五章　多元函数积分学

在一元函数积分学中,定积分是作为某种确定和式的极限来定义的。根据实际问题的需要,可以把这种和式极限的概念推广到定义在区域、曲线上多元函数的情形,便得到重积分、曲线积分的概念。本章主要研究重积分(重点讨论二重积分,三重以上积分类似推广)和曲线积分的概念、性质、计算法及其它们的一些实际应用。

5.1　二重积分的概念和性质

5.1.1　二重积分的概念

我们以计算曲顶柱体的体积和平面薄板的质量为例来给出二重积分的定义。

例 1　曲顶柱体的体积。

所谓曲顶柱体是指这样的立体:它的底面是 xOy 平面上一个有界、可求面积的区域 D,顶面是 D 上的恒正的连续函数 $z=f(x,y)$ 所代表的曲面,侧面是以 D 的边界曲线为准线而母线平行于 z 轴的柱面(图 5-1)。现在来讨论如何定义并计算这个曲顶柱体的体积 V。

假如柱体是平顶的,我们知道它的体积可用公式体积 = 底面积 × 高来计算。现在所讨论的柱体是曲顶的,当点 (x,y) 在区域 D 上变动时,高度 $f(x,y)$ 是个变量,因此其体积不能直接用上式来计算。分析这个问题,我们不难看到它与求曲边梯形面积问题是类似的,那么可以用与定积分类似的办法(即分割、近似代替、求和、取极限的办法)来解决它。

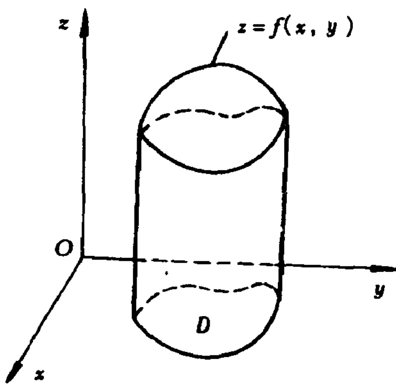


图 5-1

1. 分割:用有限条曲线任意地把区域 D 分成不相重叠的 n 个小区域 $\Delta\sigma_1,\Delta\sigma_2\cdots,\Delta\sigma_n$,并且也用这些记号 $\Delta\sigma_i(i=1,2,\cdots,n)$ 表示各个小区域的面积,相应地,分别以这些小区域的边界曲线为准线、作母线平行于 z 轴的柱面,把原来的曲顶柱体分为 n 个小曲顶柱体(图 5-2)。每个小曲顶柱体的体积用 $\Delta V_i(i=1,2,\cdots,n)$ 表示。

2. 近似代替:在每个小区域上任取一点 $(\xi_1,\eta_1),(\xi_2,\eta_2),\cdots,(\xi_n,\eta_n)$,用高为 $z_i=f(\xi_i,\eta_i)$,底为 $\Delta\sigma_i$ 的平顶柱体的体积 $f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$ 近似代替第 i 个小曲顶柱体的体积 ΔV_i,即

$$\Delta V_i\approx f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i\qquad(i=1,2,\cdots,n)$$

3. 求和:这 n 个小平顶柱体体积之和可以认为是整个曲顶柱体体积的近似值,即

$$V=\sum_{i=1}^{n}\Delta V_i\approx\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

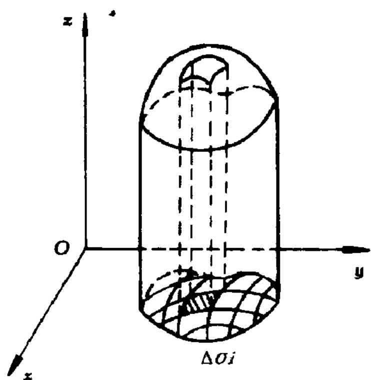


图 5-2

4. 取极限：记 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}d(\Delta\sigma_i)$ 表示这 n 个小区域的直径 $d(\Delta\sigma_i)(i=1,2,\cdots,n)$ 中的最大者（所谓直径是指一个闭区域上任意两点间距离的最大者），当 $\lambda\to0$ 时（可理解为 $\Delta\sigma_i$ 收缩为一点，取上述和式的极限，所得的极限便自然地定义为所论曲顶柱体的体积 V，即

$$V=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

例 2 非均匀平面薄板的质量。

设有一平面薄板占有 xOy 平面上的闭区域 D，它在点 (x,y) 处的面密度为 $\rho(x,y)$，这里 $\rho(x,y)>0$，且在 D 上连续，现在计算该薄板的质量 M。

我们知道，如果薄板是均匀的，即面密度是常数，那么薄板的质量可以用公式

质量 = 面密度 × 面积

来计算。现在面密度 $\rho(x,y)$ 是变量，该薄板的质量不能直接用上式来计算。但例 1 中用来处理曲顶柱体体积问题的方法完全适用于本问题。

先分割区域 D 为 n 个小闭区域 $\Delta\sigma_1,\Delta\sigma_2,\cdots,\Delta\sigma_n$（图 5-3），在每个小区域上任取一点 $(\xi_1,\eta_1),(\xi_2,\eta_2),\cdots,(\xi_n,\eta_n)$，近似地，以点 (ξ_i,η_i) 处的面密度 $\rho(\xi_i,\eta_i)$ 代替第 i 个小区域 $\Delta\sigma_i$ 上各点处的面密度，得到第 i 个小区域所代表的第 i 块小薄板质量的近似值 $\rho(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i(i=1,2,\cdots,n)$，于是整个薄板质量的近似值为 $\sum\limits_{i=1}^{n}\rho(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$。用 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}d(\Delta\sigma_i)$ 表示这 n 个小闭区域中的最大直径，当区域 D 无限细分，即当 $\lambda\to0$ 时，上述和式的极限就是所求平面薄板的质量，即

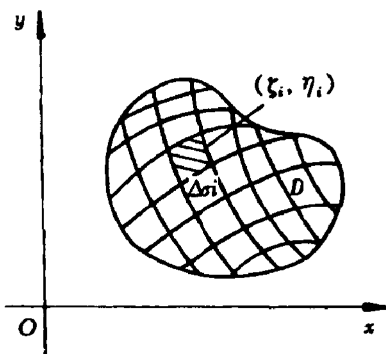


图 5-3

$$M=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

上面两个例题的实际意义虽然不同，但解决问题的方法是一样的，所求的量都归结为同一形式的和式的极限。而在实际问题中，有许多物理量或几何量都可归结为这一形式的和式的极限。因此，可以抽象出二重积分的数学定义。

【定义 1】 设二元函数 $z=f(x,y)$ 在闭区域 D 上连续，将闭区域 D 任意分成几个小闭区域 $\Delta\sigma_1,\Delta\sigma_2,\cdots,\Delta\sigma_n$，其中 $\Delta\sigma_i$ 表示第 i 个小闭区域，也表示它的面积。在每个小闭区域 $\Delta\sigma_i$ 上任取一点 (ξ_i,η_i)，作乘积 $f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i(i=1,2,\cdots,n)$，并作和 $\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$，记 $\Delta\sigma_i$ 的直径为 $d(\Delta\sigma_i)(i=1,2,\cdots,n)$，并令 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}d(\Delta\sigma_i)$ 表示这 n 个小闭区域上的最大直径，若当 $\lambda\to0$ 时，上述和式的极限存在，且极限值与闭区域 D 的分法和点 (ξ_i,η_i) 的取法无关，则称此极限为函数 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上的二重积分(double integral)，记作 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$，即

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \lim_{\lambda \to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$$

其中 $f(x,y)$叫做被积函数,$f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 叫做被积表达式,$\mathrm{d}\sigma$ 叫做面积元素,(element of area),x 与y 叫做积分变量,D 叫做积分区域(region of integration), $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$ 叫做积分和。

在二重积分的定义中,由于对闭区域 D 的划分是任意的,所以为了应用方便,我们常用平行于坐标轴的直线网来划分 D,除了包含边界点的一些小闭区域外,其余的绝大部分的小闭区域都是矩形闭区域(图 5-4)。若将小矩形闭区域的两边长度记为 Δx 和 Δy,则小矩形域的面积为 $\Delta\sigma = \Delta x \cdot \Delta y$,相应地,面积元素为 $\mathrm{d}\sigma = \mathrm{d}x\mathrm{d}y$,因此在直角坐标系下,二重积分也可以记作

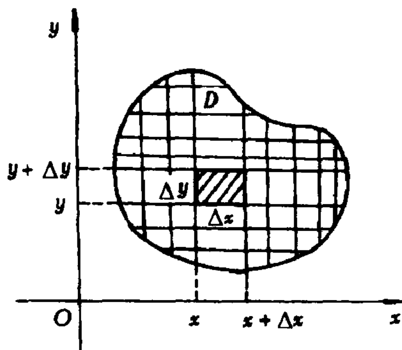


图 5-4

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

从而

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 叫做直角坐标系中的面积元素。

根据二重积分的定义,曲顶柱体的体积是曲顶上点的竖坐标函数 $f(x,y)$在底 D 上的二重积分,即

$$V = \iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

非均匀平面薄板的质量是它的面密度函数 $\rho(x,y)$在薄板所占的闭区域 D 上的二重积分,即

$$M = \iint_D \rho(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

关于二重积分,须作以下几点说明:

(1)可积性:与定积分类似,可以证明,有界闭区域 D 上的连续函数总是可积的。

(2)表示法:由于二重积分是和式的极限,因此是个数,这个数值的大小仅与被积函数及积分区域有关,而与积分变量的表示法无关,即应有

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

(3)几何意义:根据二重积分的定义,总可以把被积函数$f(x,y)$看作是空间中的一块曲面。当 $f(x,y)\geqslant 0$ 时,曲顶柱体在 xOy 平面的上方,二重积分直接可以表示为曲顶柱体的体积;当 $f(x,y)<0$ 时,曲顶柱体在 xOy 平面的下方,且二重积分为负的,这时,取其绝对值就是曲顶柱体的体积;如果 $f(x,y)$在 D 上若干区域为正,而在其余部分区域为负,我们可以把 xOy 平面上方的柱体体积取成正,xOy 平面下方的柱体体积取成负,那么,$f(x,y)$在 D 上的二重积分就等于这些部分区域上的柱体体积的代数和。

定积分及二重积分作为一类和式的极限的概念,可以很自然地推广到三重积分,即有

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v = \lim_{\lambda \to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i$$

其中 $\mathrm{d}v$ 是体积元素。只不过在三重积分中，被积函数是三元函数，积分区域 Ω 是三维空间中的一个体积区域。

5.1.2 二重积分的性质

比较定积分与二重积分的定义可以看到，二重积分与定积分有类似的性质。为方便起见，我们假设以下所讨论的区域为有界闭区域，且函数在积分区域上是连续的，因而在积分区域上都是可积的。

性质 1 常数因子可由积分号内提出来：

$$\iint_D kf(x,y)\mathrm{d}\sigma = k\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \quad (k\text{ 为常数})$$

性质 2 函数和(或差)的二重积分等于各个函数的二重积分的和(或差)：

$$\iint_D f(x,y) \pm g(x,y)\mathrm{d}\sigma = \iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \pm \iint_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

性质 3 如果区域 D 由有限个不相重叠的部分区域组成，则在 D 上的二重积分等于在各个部分区域上二重积分的和。例如，D 分为两个闭区域 D_1 与 D_2，则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \iint_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma + \iint_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

此性质表明二重积分对于积分区域具有可加性。

性质 4 如果在区域 D 上，$f(x,y)=1$，σ 为区域 D 的面积，则

$$\sigma = \iint_D 1\cdot\mathrm{d}\sigma = \iint_D \mathrm{d}\sigma$$

该性质的几何意义是很明显的。因为高为 1 的平顶柱体的体积在数值上等于该柱体的底面积。

性质 5 如果在 D 上，$f(x,y)\leqslant g(x,y)$，则有不等式

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \leqslant \iint_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

特殊地，由于

$$-|f(x,y)|\leqslant f(x,y)\leqslant |f(x,y)|$$

则有不等式

$$\left|\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\right| \leqslant \iint_D |f(x,y)|\mathrm{d}\sigma$$

性质 6 设 M、m 分别为 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上的最大值和最小值，σ 是 D 的面积，则有

$$m\sigma \leqslant \iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \leqslant M\sigma$$

上述不等式是关于二重积分估值的不等式。

性质 7 （二重积分的中值定理） 设函数 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上连续，σ 是 D 的面积，则在 D 上至少存在一点 (ξ,η)，使得下式成立：

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = f(\xi,\eta)\cdot\sigma$$

性质 7 说明，任意曲顶柱体的体积必有一个平顶柱体的体积与之相等，它们的底相同，其中 $f(\xi,\eta)$是被积函数 $f(x,y)$在闭区域 D 上的平均值。

5.2　二重积分的计算

上节中已经阐述了二重积分的概念和性质。本节将根据二重积分的几何意义来说明二重积分的计算方法，把二重积分的计算问题，转化接连两次计算定积分的问题。

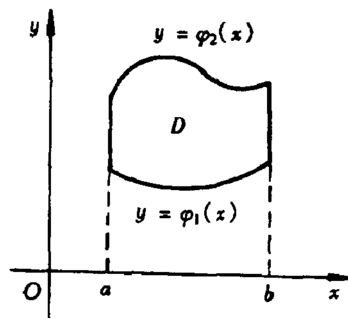
5.2.1　在直角坐标系下二重积分的计算

按照二重积分的几何意义，当 $f(x,y)\geqslant 0$ 时，二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 的值等于以 D 为底，以曲面 $z=f(x,y)$为顶的曲顶柱体的体积。借助这个几何特点，我们用"切片法"来求曲顶柱体的体积 V。

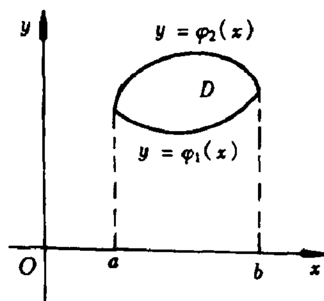
设积分区域 D 由两条平行直线 $x=a$，$x=b$ 及两条连续曲线 $y=\varphi_1(x)$，$y=\varphi_2(x)$（在$[a,b]$上 $\varphi_1(x)\leqslant\varphi_2(x)$）所围成。这时区域 D 可用不等式

$$a\leqslant x\leqslant b\quad,\quad \varphi_1(x)\leqslant y\leqslant\varphi_2(x)$$

来表示[图 5-5(a)、(b)]。



(a)



(b)

图 5-5

我们用一组平行于 yOz 面的平面 $x=x_i$（任取$[a,b]$上的分点 x_i，且满足 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_i<\cdots<x_n=b$，$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$）。将所考虑的曲顶柱体切成厚度为 Δx_i（$i=1,2,\cdots,n$）的许多小薄片[图 5-6(a)]。在 $x=x_i$ 处，所得截面是一个以区间$[\varphi_1(x_i),\varphi_2(x_i)]$为底，以曲线 $z=f(x_i,y)$为曲边的曲边梯形，其在 yOz 平面上的投影为图 5-6(b)中的阴影部分。由一元函数定积分，这个截面的面积为

$$A(x_i)=\int_{\varphi_1(x_i)}^{\varphi_2(x_i)} f(x_i,y)\mathrm{d}y$$

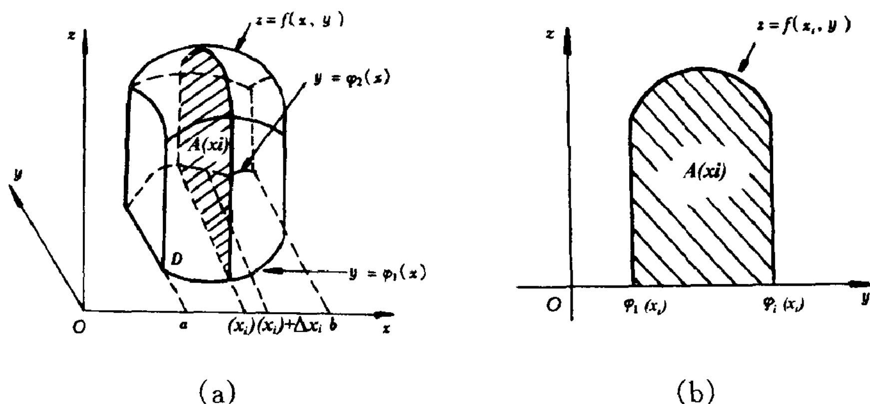


图 5-6

一般地,过区间$[a,b]$上任一点 x 且平行于 yOz 面的平面截曲顶柱体所得的截面的面积为

$$A(x)=\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)\mathrm{d}y$$

其中 y 是积分变量,x 在积分时保持不变。因此在$[a,b]$上,$A(x)$是 x 的函数。

由于小薄片切得很薄,厚度为 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}(i=1,2,\cdots,n)$,所以第 i 个小薄片的体积近似为

$$\Delta x_i\cdot\int_{\varphi_1(x_i)}^{\varphi_2(x_i)}f(x_i,y)\mathrm{d}y\qquad(i=1,2,\cdots,n)$$

然后把这 n 个近似的小薄片的体积相加,作为整个曲顶柱体体积的近似值,即

$$V\approx\sum_{i=1}^{n}\left[\int_{\varphi_1(x_i)}^{\varphi_2(x_i)}f(x_i,y)\mathrm{d}y\right]\cdot\Delta x_i$$

当 $n\to\infty$,Δx_i 无限缩小,即 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta x_i\}\to0$ 时取上述和式的极限,就得到曲顶柱体的体积 V,即

$$\begin{aligned}V&=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}\left[\int_{\varphi_1(x_i)}^{\varphi_2(x_i)}f(x_i,y)\mathrm{d}y\right]\cdot\Delta x_i\\&=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}A(x_i)\Delta x_i\\&=\int_a^bA(x)\mathrm{d}x\\&=\int_a^b\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x\end{aligned}$$

又因

$$V=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

所以

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$$

上式右端的积分叫做先对 y、后对 x 的累次积分。就是说,先把 x 看作常数、把 $f(x,y)$ 只看作 y 的函数,并对 y 计算从 $\varphi_1(x)$ 到 $\varphi_2(x)$ 的定积分,然后把算得的结果(当然是 x 的函数)再对 x 计算在区间 $[a,b]$ 上的定积分。这个先对 y、后对 x 的累次积分习惯上常记为

$$\int_a^b \mathrm{d}x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y$$

因此有等式

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y \tag{5-1}$$

这就是把二重积分化为先对 y、后对 x 的累次积分公式。

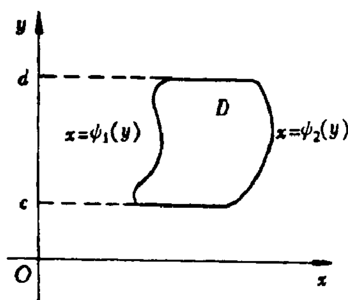
上式讨论中,开始假定了 $f(x,y)\geqslant 0$,而由二重积分的几何意义,没有这个条件限制,公式(5-1)仍然成立。

类似地,如果积分区域 D 可用不等式

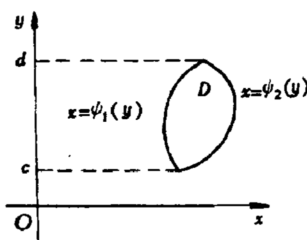
$$\psi_1(y)\leqslant x\leqslant \psi_2(y)\quad,\quad c\leqslant y\leqslant d$$

来表示[图 5-7(a),图 5-7(b)],其中 $\psi_1(y)$、$\psi_2(y)$ 在区间 $[c,d]$ 上连续,那么有等式

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_c^d \mathrm{d}y\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x \tag{5-2}$$



(a)



(b)

图 5-7

这就是把二重积分化为先对 x、后对 y 的累次积分公式。

我们把公式(5-1)中所对应的那种类型的积分区域叫做 X 型区域。此区域的特点是:穿过 D 内部且平行于 y 轴的直线与 D 的边界相交不多于两点;而把公式(5-2)中的那种类型的积分区域叫做 Y 型区域。此区域的特点是:穿过 D 的内部且平行于 x 轴的直线与 D 的边界相交不多于两点。如果计算中遇到积分区域 D 既不是 X 型区域又不是 Y 型区域的情形,我们可以把 D 分为几部分,使每个部分是 X 型区域或是 Y 型区域(图 5-8),这样在每个部分区域,内分别用公式(5-1)及(5-2)来计算,再根据二重积分的性质 3,把结果求和就可以了。

如果积分区域 D 既是 X 型区域又是 Y 型区域(图 5-9),那么公式(5-1)和(5-2)都可以用。将它们加以比较,不难得到等式

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \int_a^b \mathrm{d}x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y$$

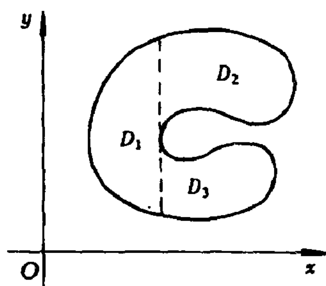


图 5-8

$$= \int_c^d \mathrm{d}y \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x$$

特殊地,如果积分区域 D 为矩形区域,即 $D: a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$(图 5-10)则有等式

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \int_a^b \mathrm{d}x \int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$$

$$= \int_c^d \mathrm{d}y \int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$$

此式表明累次积分与积分的先后次序无关。

在计算二重积分时,先画出积分区域 D 的图形,再判别积分区域的类型,然后找出区域 D 中的点 x、y 坐标所满足的不等式,来确定累次积分的上、下限。

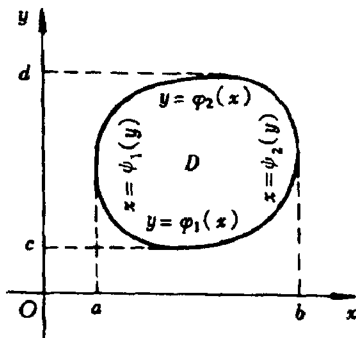


图 5-9

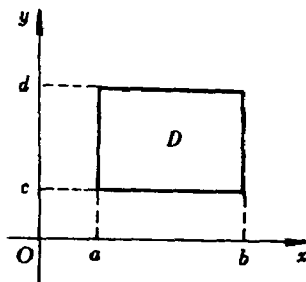


图 5-10

例 3 计算 $\iint_D \left(1 - \frac{x}{4} - \frac{y}{3}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 $D: -2 \leqslant x \leqslant 2, \quad -1 \leqslant y \leqslant 1$。

解: 区域 $D: -2 \leqslant x \leqslant 2, -1 \leqslant y \leqslant 1$ 是矩形区域,如果取先对 y、后对 x 的积分顺序得

$$\iint_D \left(1 - \frac{x}{4} - \frac{y}{3}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-2}^{2}\mathrm{d}x\int_{-1}^{1}\left(1 - \frac{x}{4} - \frac{y}{3}\right)\mathrm{d}y$$

$$= \int_{-2}^{2}\left[\left(1 - \frac{x}{4}\right)y - \frac{y^2}{6}\right]_{-1}^{1}\mathrm{d}x$$

$$= 2\int_{-2}^{2}\left(1 - \frac{x}{4}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \left[2x - \frac{x^2}{4}\right]_{-2}^{2} = 8$$

如果取先对 x,后对 y 的积分顺序则可以得到同样的结果。

例 4 计算 $\iint_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 D 是抛物线 $y^2 = x$ 及直线 $y = x - 2$ 所围成的区域。

解: 积分区域 D 如图 5-11 所示。D 既是 X 型、又是 Y 型区域,若按 Y 型区域、即先对 x、后对 y 积分得

$$\iint_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-1}^{2}\mathrm{d}y\int_{y^2}^{y+2} xy\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-1}^{2} \left[\frac{x^2}{2} y \right]_{y^2}^{y+2} \mathrm{d}y$$

$$= \int_{-1}^{2} \frac{1}{2} [y(y+2)^2 - y^5] \mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{y^4}{4} + \frac{4}{3} y^3 + 2y^2 - \frac{y^6}{6} \right]_{-1}^{2} = 5\frac{5}{8}$$

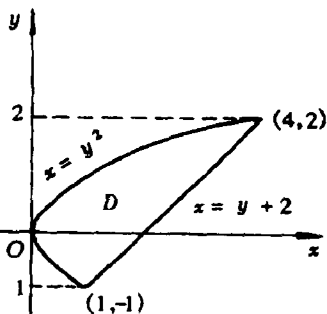


图 5-11

若按 X 型区域计算,即先对 y 后对 x 积分,可把 D 分为D_1 和 D_2 两部分(图 5-12)

D_1: $0 \leqslant x \leqslant 1, -\sqrt{x} \leqslant y \leqslant \sqrt{x}$

D_2: $1 \leqslant x \leqslant 4, x-2 \leqslant y \leqslant \sqrt{x}$

因此,根据二重积分的性质 3,就有

$$\iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{D_1} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{D_2} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1 \mathrm{d}x \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} xy\mathrm{d}y + \int_1^4 \mathrm{d}x \int_{x-2}^{\sqrt{x}} xy\mathrm{d}y$$

可见,此式计算要比前一种积分次序麻烦。

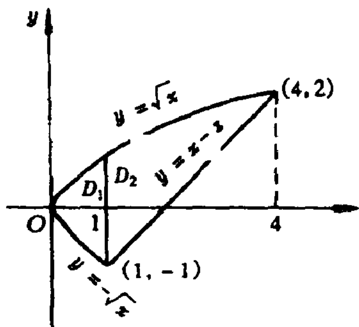


图 5-12

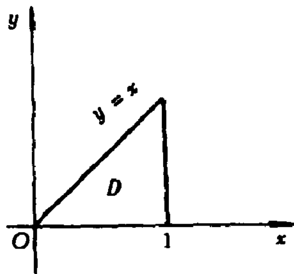


图 5-13

例 5 计算 $\iint\limits_D e^{-x^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 D 由直线 $y=0, y=x$ 及 $x=1$ 所围成。

解: 积分区域 D 如图 5-13 所示。单从积分区域来看,似乎两种积分次序运算难易相当,但注意到被积函数 e^{-x^2} 的原函数不能用初等函数表示,故不宜采用先 x、后 y 的积分顺序计算,只能先对 y、后对 x 积分,于是

$$\iint\limits_D e^{-x^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^x e^{-x^2} \mathrm{d}y = \int_0^1 [e^{-x^2} y]_0^x \mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 x e^{-x^2} \mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{2} e^{-x^2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{e}\right)$$

上述例子表明,把二重积分化为累次积分时,需要根据积分区域 D 和被积函数的特点,选择恰当的积分次序进行运算。

例 6 更换积分

$$I=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{x^2} f(x,y)\mathrm{d}y+\int_1^3 \mathrm{d}x\int_0^{\frac{1}{2}(3-x)} f(x,y)\mathrm{d}y$$

的积分次序。

解： 积分 I 的积分区域 D 是由两个区域 D_1 和 D_2 组成，其中 $D_1:0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant x^2$ $D_2:1\leqslant x\leqslant 3,0\leqslant y\leqslant \frac{1}{2}(3-x)$。

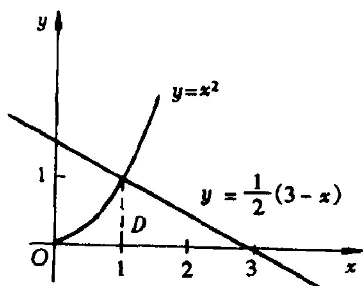


图 5-14

原题设的是先对 y 后对 x 的累次积分。如果要更换积分次序，即先对 x 后对 y 积分，那么先固定 y，将区域 D 的边界曲线改写成

$$x=\sqrt{y},x=3-2y$$

于是 D 可表示为$\sqrt{y}\leqslant x\leqslant 3-2y,0\leqslant y\leqslant 1$，从而

$$I=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1 \mathrm{d}y\int_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x,y)\mathrm{d}x$$

例 6 的结果表明，先对 y 后对 x 的累次积分可以改变成先对 x 后对 y 的累次积分。反之也有相同的结论。

5.2.2 在极坐标系下二重积分的计算

有些二重积分，在直角坐标系下计算颇为麻烦，甚至不能得到结果。但如果将直角坐标系化为极坐标系下二重积分的计算，方法却很简单。这种方法，对积分区域是圆域或圆的一部分及被积函数为 $f(x^2+y^2)$的形式计算往往要简单得多。

在极坐标系下计算二重积分，需将积分区域 D 和被积函数都改用极坐标表示，并在极坐标系中求出面积元素。

首先，利用关系式 $x=r\cos\theta,y=r\sin\theta\quad(0\leqslant r<+\infty,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$，可将被积函数 $f(x,y)$化为极坐标系中积分变量 r,θ 的函数

$$f(x,y)=f(r\cos\theta,r\sin\theta)$$

其次，假定过极点的射线与积分区域相交不多于两点，为了求出极坐标系中的面积元素 $\mathrm{d}\sigma$，我们用一组以极点为中心的同心圆：$r=$常数和一组从极点出发的射线：$\theta=$常数，将闭区域 D 分成 n 个小闭区域(图 5-15)，设 $\Delta\sigma$ 是极角分别为 θ 和 $\theta+\Delta\theta$ 的两条射线及半径分别为 r 和 $r+\Delta r$ 的两条圆弧所围成的小闭区域。则由扇形的面积公式得

$$\Delta\sigma=\frac{1}{2}(r+\Delta r)^2\Delta\theta-\frac{1}{2}r^2\Delta\theta$$

$$=r\Delta r\Delta\theta+\frac{1}{2}(\Delta r)^2\Delta\theta$$

忽略高阶无穷小$\frac{1}{2}(\Delta r)^2\Delta\theta$，便有 $\Delta\sigma\approx r\Delta r\Delta\theta$，于是面积元素为 $\mathrm{d}\sigma=r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$

这样，我们便得到了二重积分在极坐标系下的计算公式

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

其中 $r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$ 就是极坐标系中的面积元素。

极坐标系中的二重积分，同样可化为累次积分来计算。下面分两种情形来说明。

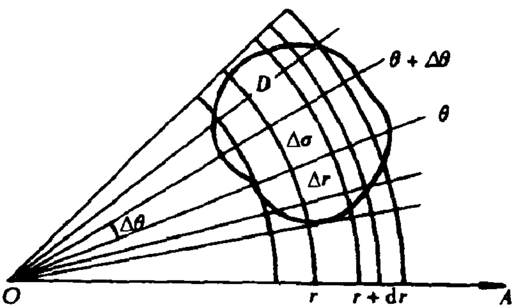
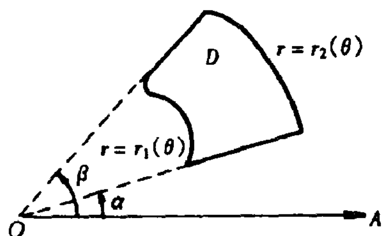


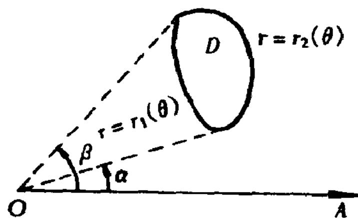
图 5-15

一、极点不在积分区域 D 内

这时积分区域 D 在两条射线 $\theta=\alpha$ 与 $\theta=\beta$ 之间，射线与区域边界的交点把区域边界分为两部分：$r=r_1(\theta)$，$r=r_2(\theta)$，因而区域 D 可表示为 D：$\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$，$r_1(\theta)\leqslant r\leqslant r_2(\theta)$ [图 5-16(a)，5-16(b)]，于是在极坐标系下，二重积分化为累次积分的计算公式为



(a)



(b)

图 5-16

$$\iint_D f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\int_\alpha^\beta\mathrm{d}\theta\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r \tag{5-3}$$

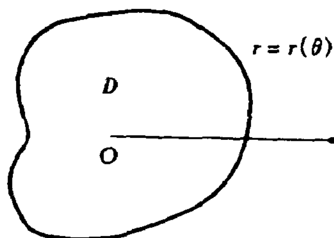


图 5-17

二、极点在积分区域 D 的内部

如图 5-17 所示，设区域 D 的边界方程是 $r=r(\theta)$，这时区域 D 可表为 D:$0\leqslant\theta\leqslant2\pi$，$0\leqslant r\leqslant r(\theta)$，于是在极坐标系中的二重积分化为累次积分的计算公式为

$$\iint_D f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{r(\theta)}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r \tag{5-4}$$

例 7 计算 $\iint\limits_D xy^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是单位圆在第一象限的部分。

解： 在极坐标系下，积分区域 D 可用不等式 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$，$0\leqslant r\leqslant1$ 表示(图 5-18)。于是

$$\begin{aligned}\iint_D xy^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\cos\theta\cdot r^2\sin^2\theta\cdot r\mathrm{d}r\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin^2\theta\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^4\mathrm{d}r\\&=\frac{1}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin^2\theta\mathrm{d}\theta=\frac{1}{15}\end{aligned}$$

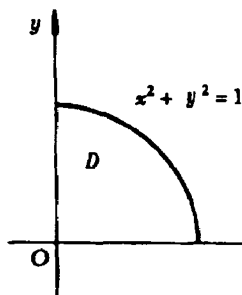


图 5-18

例 8 计算 $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是圆 $x^2+y^2=2y$ 所围成的区域。

解：积分区域 D 如图 5-19 所示。圆 $x^2+y^2=2y$ 的极坐标方程为 $r=2\sin\theta$，则 D 可用不等式：$0\leqslant\theta\leqslant\pi, 0\leqslant r\leqslant 2\sin\theta$ 表示。

所以

$$\begin{aligned}\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint\limits_D r\cdot r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta} r^2\mathrm{d}r \\ &= \int_0^{\pi}[\frac{r^3}{3}]_0^{2\sin\theta}\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{8}{3}\int_0^{\pi}\sin^3\theta\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{8}{3}\int_0^{\pi}(\cos^2\theta-1)\mathrm{d}\cos\theta = \frac{32}{9}\end{aligned}$$

例 9 计算 $\iint\limits_D \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是圆 $x^2+y^2=a^2$ 在第一象限的部分。

解：在极坐标系下，圆 $x^2+y^2=a^2$ 的极坐标方程是 $r=a$，因此，积分区域 D 可用不等式 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}, 0\leqslant r\leqslant a$ 表示，从而

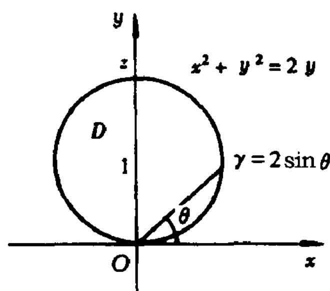


图 5-19

$$\begin{aligned}\iint\limits_D \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^a \mathrm{e}^{-r^2}\cdot r\mathrm{d}r \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-r^2}\right]_0^a\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-a^2})\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{\pi}{4}(1-\mathrm{e}^{-a^2})\end{aligned}$$

对于本例题，如果采用直角坐标计算，由于 $\int \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$ 不能用初等函数表示，所以算不出来。下面利用此题的结果，来计算广义积分 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$ 。

考查三个闭区域：

$D_1: x^2+y^2\leqslant R^2, x\geqslant 0, y\geqslant 0$

$D_2: x^2+y^2\leqslant 2R^2, x\geqslant 0, y\geqslant 0$

$S: 0\leqslant x\leqslant R, 0\leqslant y\leqslant R$

显然有 $D_1\subset S\subset D_2$（图 5-20）。

由于 $\mathrm{e}^{-x^2-y^2}>0$，从而展布在这三个闭区域上的二重积分之间有不等式

$$\iint_{D_1} e^{-x^2-y^2}dxdy \leqslant \iint_{S} e^{-x^2-y^2}dxdy \leqslant \iint_{D_2} e^{-x^2-y^2}dxdy$$

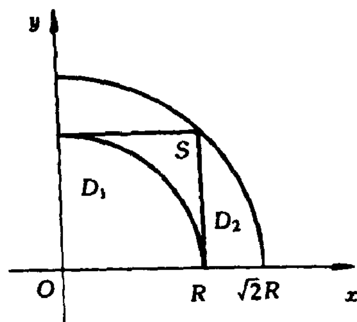


图 5-20

因为

$$\iint_{S} e^{-x^2-y^2}dxdy = \int_0^R e^{-x^2}dx\int_0^R e^{-y^2}dy = \left(\int_0^R e^{-x^2}dx\right)^2$$

再由例 9 的结果有

$$\iint_{D_1} e^{-x^2-y^2}dxdy = \frac{\pi}{4}(1-e^{-R^2})$$

$$\iint_{D_2} e^{-x^2-y^2}dxdy = \frac{\pi}{4}(1-e^{-2R^2})$$

于是上面的不等式可以写成

$$\frac{\pi}{4}(1-e^{-R^2}) \leqslant \left(\int_0^R e^{-x^2}dx\right)^2 \leqslant \frac{\pi}{4}(1-e^{-2R^2})$$

再令 $R\to+\infty$,上式两端的极限都是$\frac{\pi}{4}$,所以

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

此积分在概率论中常遇到,我们称它为概率积分。如果再作一个变换,令$\sqrt{b}x=t$,则有

$$\int_0^{+\infty} e^{-bx^2}dx = \frac{1}{\sqrt{b}}\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{b}}$$

这类积分很重要,在一些实际问题中经常出现。

5.3 二重积分的简单应用

5.3.1 几何上的应用

一、平面图形的面积

设平面曲线所围成的部分为一个闭区域 D,由二重积分的性质 4,可得该区域 D 的面积σ 为

$$\sigma = \iint_D dxdy$$

例 10 求由抛物线 $y=x^2, y=4-x^2$ 所围成的平面图形的面积。

解: 积分区域 D 如图 5-21 所示,视 D 为 X 型区域,并求出交点坐标为$(-\sqrt{2},2)$及$(\sqrt{2},2)$,注意到图形的对称性,有

$$\sigma = \iint_D dxdy = 2\int_0^{\sqrt{2}}dx\int_{x^2}^{4-x^2}dy$$

$$= 2\int_0^{\sqrt{2}}(4-2x^2)dx = \frac{16}{3}\sqrt{2}$$

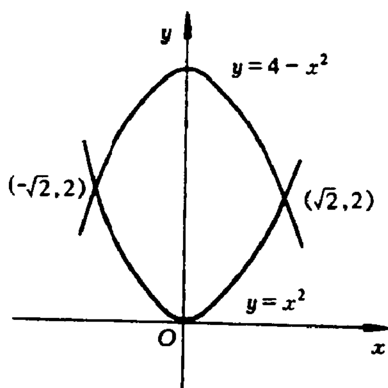


图 5-21

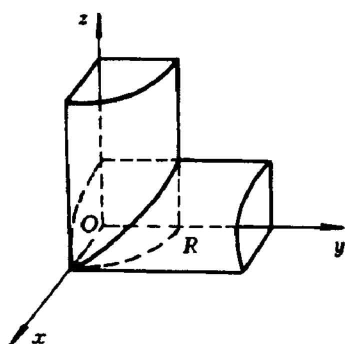
二、空间立体的体积

根据二重积分的几何意义，以 xOy 平面上闭区域 D 为底，以 D 上的二元函数 $z=f(x,y)$ 曲面图形为顶的曲顶柱体的体积为

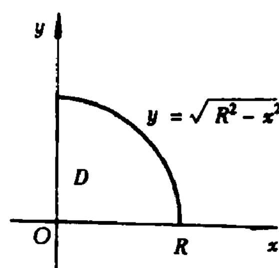
$$V=\iint_D |f(x,y)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

例 11 求由两个圆柱面 $x^2+y^2=R^2$ 和 $x^2+z^2=R^2$ 相交所围成的立体的体积。

解： 如图 5-22(a)所示。利用立体关于坐标平面的对称性，只要算出位于第一卦限部分的体积 V_1，它的 8 倍就是所要求的体积 V。



(a)



(b)

图 5-22

所求立体在第一卦限部分可以看成是一个曲顶柱体，它的底为 $D:0\leqslant x\leqslant R,0\leqslant y\leqslant\sqrt{R^2-x^2}$[图 5-22(b)]它的顶是柱面 $z=\sqrt{R^2-x^2}$，于是

$$\begin{aligned}V_1&=\iint_D\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_0^R\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}y\\&=\int_0^R\left[y\sqrt{R^2-x^2}\right]_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\mathrm{d}x\\&=\int_0^R(R^2-x^2)\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3}R^3\end{aligned}$$

从而所求立体的体积为 $V=8V_1=\frac{16}{3}R^3$。

5.3.2 物理及力学上的应用

一、平面薄板的质量

由第五章的例 2 及二重积分的定义可知，占有 xOy 平面上的闭区域D，面密度为 $\rho(x,y)$的平面薄板的质量为

$$M=\iint\limits_{D}\rho(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

例 12 设平面薄板的面密度为 $\rho(x,y)=x^2+y^2$，求由直线 $x+y=1, x=0, y=0$ 所围成的平面薄板的质量。

解： 平面薄板在 xOy 平面上所占有的区域D 如图 5-23 所示。即 $D:0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1-x$ 所求平面薄板的质量为

$$\begin{aligned}M&=\iint\limits_{D}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}(x^2+y^2)\mathrm{d}y\\&=\int_0^1\left[x^2-x^3+\frac{(1-x)^3}{3}\right]\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{6}\end{aligned}$$

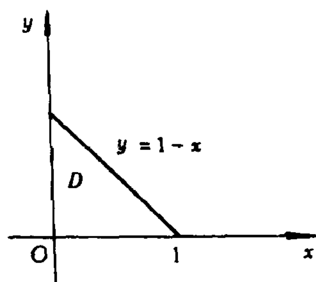


图 5-23

二、平面薄板的重心

先介绍平面上质点系的重心坐标公式。

设 xOy 平面上有 n 个质点，它们分别位于点(x_1,y_1)、(x_2,y_2)、…、(x_n,y_n)处，质量分别为 m_1、m_2、…、m_n。由力学知识知道，该质点系的重心坐标为

$$\bar{x}=\frac{M_y}{M}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}m_ix_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}m_i},\ \bar{y}=\frac{M_x}{M}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}m_iy_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}m_i}$$

其中 $M_y=\sum\limits_{i=1}^{n}m_ix_i$，$M_x=\sum\limits_{i=1}^{n}m_iy_i$ 分别为该质点系对 Oy 轴，Ox 轴的静力矩；$M=\sum\limits_{i=1}^{n}m_i$ 为该质点系的总质量。

现在利用上述公式确定平面薄板的重心。

设平面薄板占有 xOy 平面上的闭区域D，在点(x,y)处的面密度为 $\rho(x,y)$，并假定 $\rho(x,y)$在 D 上连续。为求该薄板的重心，我们将区域 D 分成n 个小区域 $\Delta\sigma_i(i=1,2,\cdots,n)$，在 $\Delta\sigma_i$ 上任取一点(x_i,y_i)，假定把 $\Delta\sigma_i$ 的近似质量$\rho(x_i,y_i)\Delta\sigma_i$ 看作集中在这一点上，则它对 ox 轴的静力矩的近似值为$y_i\cdot\rho(x_i,y_i)\Delta\sigma_i(i=1,2,\cdots,n)$，作和

$$\sum_{i=1}^{n}y_i\rho(x_i,y_i)\Delta\sigma_i$$

就是整个薄板对 Ox 轴的静力矩的近似值。当 $n\to\infty$，$\Delta\sigma_i$ 无限缩小，即 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta\sigma_i\}\to 0$时，上述和式的极限如果存在，就可定义这块薄板对 Ox 轴的静力矩M_x，

即 $M_x=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}y_i\rho(x_i,y_i)\Delta\sigma_i$ 同理,可得薄板对 Oy 轴的静力矩M_y,即

$$M_y=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}x_i\rho(x_i,y_i)\Delta\sigma_i$$

根据二重积分的定义,便得

$$M_x=\iint\limits_D y\rho(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\quad M_y=\iint\limits_D x\rho(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

薄板的质量为

$$M=\iint\limits_D \rho(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

所以薄板的重心坐标为

$$\bar{x}=\frac{M_y}{M}=\frac{\iint\limits_D x\rho(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint\limits_D \rho(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y},\quad \bar{y}=\frac{M_x}{M}=\frac{\iint\limits_D y\rho(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint\limits_D \rho(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}\tag{5-5}$$

如果薄板是均匀的,即面密度是常数,由公式(5-5)便得均匀平面薄板的重心坐标

$$\bar{x}=\frac{1}{A}\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\quad \bar{y}=\frac{1}{A}\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\tag{5-6}$$

其中 $A=\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 为区域D 的面积。这时薄板的重心完全由闭区域 D 的形状所决定。

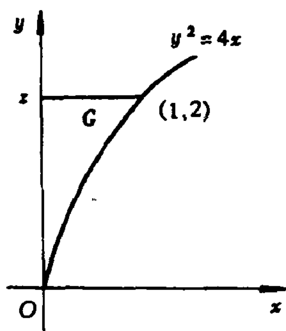


图 5-24

例 13 求由抛物线 $y^2=4x$ 及直线$y=2$ 及 Oy 轴所围成的一均匀平面薄板的重心坐标。

解: 平面薄板所占的 xOy 面的区域为 $D:0\leqslant y\leqslant 2,0\leqslant x\leqslant \frac{1}{4}y^2$(图 5-24)。由于薄板是均匀的,可以用公式(5-6)来计算。

因为

$$A=\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^2\mathrm{d}y\int_0^{\frac{y^2}{4}}\mathrm{d}x=\int_0^2\frac{y^2}{4}\mathrm{d}y=\frac{2}{3}$$

$$\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^2\mathrm{d}y\int_0^{\frac{1}{4}y^2}x\mathrm{d}x=\int_0^2\frac{1}{32}y^4\mathrm{d}y=\frac{1}{5}$$

$$\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^2 y\mathrm{d}y\int_0^{\frac{1}{4}y^2}\mathrm{d}x=\int_0^2\frac{1}{4}y^3\mathrm{d}y=1$$

所以所求的重心坐标为

$$\bar{x}=\frac{1}{\frac{2}{3}}\cdot\frac{1}{5}=\frac{3}{10},\quad \bar{y}=\frac{1}{\frac{2}{3}}\cdot 1=\frac{3}{2}$$

三、平面薄板的转动惯量

根据力学知识,质点绕某一定轴旋转的转动惯量 I 是质点的质量 m 与这个质点到这定轴之间距离 r 的平方的乘积,即 $I=mr^2$。质点系对某一定轴的转动惯量,就是该质点

系中各质点对该轴的转动惯量之和。因此,用类似于求平面薄板重心的方法,可求得位于 xOy 平面闭区域D 上的一块面密度为$\rho(x,y)$的平面薄板,对 Ox 轴、Oy 轴的转动惯量 I_x、I_y 为

$$I_x = \iint_D y^2\rho(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$I_y = \iint_D x^2\rho(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad (5\text{-}7)$$

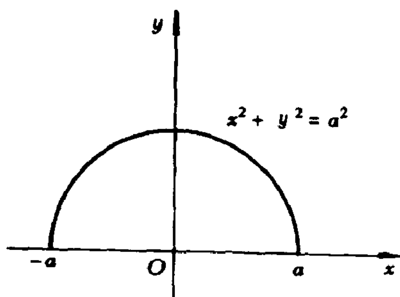


图 5-25

例 14 求半径为 a 的均匀半圆薄板(面密度为 ρ),对于其直径边的转动惯量。

解: 取坐标系如图 5-25 所示,则半圆薄板所占的区域为 $D: x^2+y^2\leqslant a^2, y\geqslant 0$。而所求的转动惯量即为半圆薄板对于 Ox 轴的转动惯量I_x。即

$$\begin{aligned} I_x &= \iint_D \rho y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \rho\int_0^\pi \mathrm{d}\theta\int_0^a r^2\sin^2\theta\cdot r\mathrm{d}r \\ &= \rho\int_0^\pi \sin^2\theta\cdot\frac{r^4}{4}\Big|_0^a\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{a^4\rho}{4}\int_0^\pi \sin^2\theta\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{4}a^4\rho\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{1}{4}Ma^2 \end{aligned}$$

其中 $M=\frac{1}{2}\pi a^2\rho$ 为半圆薄板的质量。

5.4 曲线积分

前面讨论的定积分是以 Ox 轴的一段为积分区间,二重积分是以 xOy 平面上的一个闭区域为积分区域。但客观存在着一些具体问题,促使我们必须把积分范围改变到一段曲线弧上来。以一段曲线为积分范围的积分称为曲线积分。本节将阐述有关这种积分的一些基本内容。

5.4.1 对弧长的曲线积分(第一类曲线积分)

一、概念和性质

如果把二重积分区域 D 看成是一条曲线 $\mathscr{L}$,类似于二重积分定义的思想方法,可给出第一类曲线积分的概念。

【定义 2】 设 $\mathscr{L}$为 xOy 平面内的一条光滑曲线弧,函数 $f(x,y)$在 $\mathscr{L}$上有界,A、B 是 $\mathscr{L}$的两个端点。依次用分点 $A=M_0$、$M_1\cdots$、M_{n-1}、$M_n=B$ 把 $\mathscr{L}$任意分成 n 个小弧段 $\overset{\frown}{M_0M_1}$、$\overset{\frown}{M_1M_2}$、$\cdots$、$\overset{\frown}{M_{n-1}M_n}$,每小段的弧长记为 $\Delta s_i(i=1,2,\cdots,n)$。在$\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$上任取

一点(ξ_i,η_i)，作乘积$f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i\ (i=1,2,\cdots,n)$，并作和$\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$，以$\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta s_i\}$表示各小弧段的最大长度，若$\lambda\to0$时，上述和式的极限存在，则称此极限为函数$f(x,y)$在曲线$\mathscr{L}$上对弧长的曲线积分(curvilinear integral with respect to arc length)或称为第一类曲线积分，记作

$$\int_{\mathscr{L}}f(x,y)\mathrm{d}s$$

即

$$\int_{\mathscr{L}}f(x,y)\mathrm{d}s=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$$

其中$f(x,y)$叫做被积函数，$\mathscr{L}$叫做积分弧段。

由对弧长的曲线积分的定义可知，它有以下性质。

1° $\int_{\mathscr{L}}kf(x,y)\mathrm{d}s=k\int_{\mathscr{L}}f(x,y)\mathrm{d}s$（$k$为常数）

2° $\int_{\mathscr{L}}[f(x,y)\pm g(x,y)]\mathrm{d}s=\int_{\mathscr{L}}f(x,y)\mathrm{d}s\pm\int_{\mathscr{L}}g(x,y)\mathrm{d}s$

3° 若$\mathscr{L}$由$\mathscr{L}_1$、$\mathscr{L}_2$组成，则有

$$\int_{\mathscr{L}}f(x,y)\mathrm{d}s=\int_{\mathscr{L}_1}f(x,y)\mathrm{d}s+\int_{\mathscr{L}_2}f(x,y)\mathrm{d}s$$

弧长的曲线积分与曲线的方向无关，因为在定义中，Δs_i代表弧长，它总是正数，不因曲线方向的改变而改变符号。

二、第一类曲线积分的计算法

【定理1】 设$f(x,y)$在曲线弧$\mathscr{L}$上有定义且连续，$\mathscr{L}$的参数方程为$\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=\psi(t)\end{cases}\quad\alpha\leqslant t\leqslant\beta$，其中$\varphi(t)$、$\psi(t)$在$[\alpha,\beta]$上具有一阶连续导数，且$[\varphi'(t)]^2+[\varphi'(t)]^2\neq0$，则曲线积分$\int_{\mathscr{L}}f(x,y)\mathrm{d}s$存在，且

$$\int_{\mathscr{L}}f(x,y)\mathrm{d}s=\int_{\alpha}^{\beta}f[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\mathrm{d}t\qquad(\alpha<\beta)\qquad(5\text{-}8)$$

（证明略。）

此定理表明，计算对弧长的曲线积分$\int_{\mathscr{L}}f(x,y)\mathrm{d}s$时，只要把$x$、$y$、$\mathrm{d}s$依次换成$\varphi(t)$、$\psi(t)$、$\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\mathrm{d}t$，然后从$\alpha$到$\beta$上作定积分即可。要注意的是：定积分的下限$\alpha$必须小于上限$\beta$。

如果平面曲线$\mathscr{L}$的方程为$y=\psi(x)$，$a\leqslant x\leqslant b$那么此方程可以看作是特殊的参数方程

$$\begin{cases}x=x\\y=\psi(x)\end{cases}\qquad a\leqslant x\leqslant b$$

于是由公式(5-8)得到

$$\int_{\mathscr{L}}f(x,y)\mathrm{d}s=\int_{a}^{b}f[x,\psi(x)]\sqrt{1+[\psi'(x)]^2}\mathrm{d}x\qquad(a<b)$$

类似地，如果曲线$\mathscr{L}$的方程为$x=\varphi(y)$，$c\leqslant y\leqslant d$，那么此方程可以看作特殊的参数

方程

$$\begin{cases} x = \varphi(y) \\ y = y \end{cases} \quad c \leqslant y \leqslant d$$

则有

$$\int_{\mathscr{L}} f(x,y)\mathrm{d}s = \int_c^d f[\varphi(y),y]\sqrt{1+[\varphi'(y)]^2}\mathrm{d}y$$

例 15 计算$\int_{\mathscr{L}} xy\mathrm{d}s$，其中$\mathscr{L}$是单位圆在第一象限的部分。

解：$\mathscr{L}$的参数方程为$\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \end{cases}$，$0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}$

所以

$$\int_{\mathscr{L}} xy\mathrm{d}s = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\cdot\sin t\cdot\sqrt{(-\sin t)^2+(\cos t)^2}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$$

例 16 计算$\int_{\mathscr{L}}\sqrt{y}\mathrm{d}s$，其中$\mathscr{L}$是抛物线$y=x^2$上点$O(0,0)$到点$B(1,1)$之间的一段弧。

解：因为$\mathscr{L}$由方程$y=x^2,0\leqslant x\leqslant 1$给出(图 5-26)，所以

$$\int_{\mathscr{L}}\sqrt{y}\mathrm{d}s = \int_0^1\sqrt{x^2}.\sqrt{1+(2x)^2}\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 x\sqrt{1+4x^2}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{12}[(1+4x^2)^{3/2}]_0^1$$

$$= \frac{1}{12}(5\sqrt{5}-1)$$

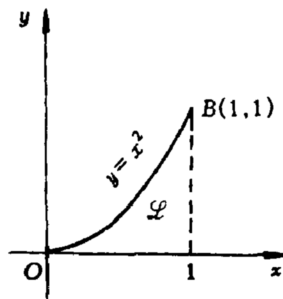


图 5-26

关于对弧长的曲线积分，本章定义 2，计算公式(5-8)，可以类似地推广到空间曲线Γ的情形，即

$$\int_{\Gamma} f(x,y,z)\mathrm{d}s = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta s_i$$

又若P的参数方程为：$x=\varphi(t),y=\psi(t),z=\omega(t),\alpha\leqslant t\leqslant\beta$，则有公式

$$\int_P f(x,y,z)\mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2+[\omega'(t)]^2}\mathrm{d}t$$

$$(\alpha<\beta)$$

5.4.2 对坐标的曲线积分(第二类曲线积分)

一、概念和性质

为了计算变力沿平面曲线所做的功，我们给出第二类曲线积分的概念。

【定义 3】 设 $\mathscr{L}$ 是 xOy 平面内从点 A 到点 B 的一条有向光滑曲线弧，函数 $P(x, y)$、$Q(x, y)$ 在 $\mathscr{L}$ 上有界。按 $\mathscr{L}$ 的方向顺序用分点 $A = M_0(x_0, y_0)$、$M_1(x_1, y)$、…、$M_{n-1}(x_{n-1}$、$y_{n-1})$、$M_n(x_n, y_n) = B$ 把 $\mathscr{L}$ 任意分成 n 个有向小弧段 $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}(i = 1, 2, \cdots, n)$，设 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$，$\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$，点 (ξ_i, η_i) 为 $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ 上任意取定的点。如果当各个小弧段长度的最大值 $\lambda \to 0$ 时，和式

$$\sum_{i=1}^{n}[P(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i)\Delta y_i]$$

的极限存在，则称此极限为函数 $P(x, y)$、$Q(x, y)$ 在有向曲线弧 $\mathscr{L}$ 上对坐标的曲线积分 (curvilinear integral with respect to coordinate)，也称为第二类曲线积分。记作

$$\int_{\mathscr{L}} P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y$$

即

$$\int_{\mathscr{L}} P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y = \lim_{\lambda \to 0}\sum_{i-1}^{n}[P(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i)\Delta y_i]$$

其中 $P(x, y)$、$Q(x, y)$ 叫做被积函数，$\mathscr{L}$ 叫做积分弧段。

对坐标 x、y 的曲线积分，也可以记作

$$\int_{\mathscr{L}} P(x, y)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda \to 0}\sum_{i-1}^{n} P(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i$$

$$\int_{\mathscr{L}} Q(x, y)\mathrm{d}y = \lim_{\lambda \to 0}\sum_{i-1}^{n} Q(\xi_i, \eta_i)\Delta y_i$$

根据此定义，不难得到变力 $\boldsymbol{F}(x, y) = P(x, y)\boldsymbol{i} + Q(x, y)\boldsymbol{j}$ 沿平面曲线 $\mathscr{L}$ 从 A 移到 B 对质点 M 所做的功为

$$W = \int_{\overset{\frown}{AB}} P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y$$

对坐标的曲线积分，有如下简单性质。

1° $\int_{\mathscr{L}} kP\mathrm{d}x + kQ\mathrm{d}y = k\int_{\mathscr{L}} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$（$k$ 为常数）

2° 若曲线 $\mathscr{L}$ 由 $\mathscr{L}_1$、$\mathscr{L}_2$ 组成，则

$$\int_{\mathscr{L}} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_{\mathscr{L}_1} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + \int_{\mathscr{L}_2} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

3° 设 $\mathscr{L}$ 是有向曲线弧，$\mathscr{L}^-$ 是与 $\mathscr{L}$ 方向相反的有向曲线弧，则

$$\int_{\mathscr{L}^-} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = -\int_{\mathscr{L}} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

此性质表明，当积分弧段的方向改变时，对坐标的曲线积分要改变符号。这与对弧长的曲线积分是不同的，因此关于对坐标的曲线积分，必须注意积分弧段的方向。

二、第二类曲线积分的计算法

【定理 2】 设 $P(x, y)$、$Q(x, y)$ 在有向曲线弧 $\mathscr{L}$ 上有定义且连续，$\mathscr{L}$ 的参数方程为

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$$

当 t 单调地由 α 变到 β 时，点 $M(x,y)$ 从 $\mathscr{L}$ 的起点 A 沿曲线 $\mathscr{L}$ 运动到终点 B，$\varphi(t)$，$\psi(t)$ 在以 α 及 β 为端点的闭区间上具有一阶连续导数，且 $[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2\neq0$，则曲线积分 $\int_{\mathscr{L}}P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 存在，且有

$$\int_{\mathscr{L}}P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$
$$=\int_{\alpha}^{\beta}\{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)+Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}\mathrm{d}t \tag{5-9}$$

（证明略。）

此定理表明：计算对坐标的曲线积分

$$\int_{\mathscr{L}}P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

时，只要把 x、y、$\mathrm{d}x$、$\mathrm{d}y$ 依次换成 $\varphi(t)$、$\psi(t)$、$\varphi'(t)\mathrm{d}t$、$\psi'(t)\mathrm{d}t$，然后从 $\mathscr{L}$ 的起点所对应的参数值 α 到 $\mathscr{L}$ 的终点所对应的参数值 β 作定积分即可。但要注意，下限 α 对应于 $\mathscr{L}$ 的起点，上限 β 对应于 $\mathscr{L}$ 的终点，且 α 不一定小于 β。

例 17，计算 $\int_{\mathscr{L}}y^2\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y$，其中 $\mathscr{L}$ 为

(1)抛物线 $y=2x^2$ 上从点 $O(0,0)$ 到 $B(1,2)$ 的一段弧；

(2)有向折线 OAB，这里 O、A、B 依次是点 $(0,0)$，$(1,0)$，$(1,2)$。

解： 如图 5-27 所示

(1)化为 x 的定积分。因为 $\mathscr{L}$: $y=2x^2$，x 从 0 变到 1，所以

$$\int_{\mathscr{L}}y^2\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^1(4x^4+x\cdot4x)\mathrm{d}x$$
$$=4\int_0^1(x^4+x^2)\mathrm{d}x$$
$$=\frac{32}{15}$$

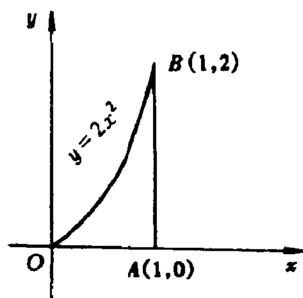


图 5-27

(2) 因为

$$\int_{\mathscr{L}}y^2\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y=\int_{OA}y^2\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y+\int_{AB}y^2\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y$$

在 OA 上，$y=0$，x 从 0 变到 1，所以

$$\int_{OA}y^2\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y=\int_0^1(0+x.0)\mathrm{d}x=0$$

在 AB 上，$x=1$，y 从 0 变到 2，所以

$$\int_{AB}y^2\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y=\int_0^2(y^2\cdot0+1)\mathrm{d}y=2$$

从而

$$\int_{\mathscr{L}}y^2\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y=0+2=2$$

从例 17 看出，虽然两个曲线积分的被积函数相同，起点和终点也相同，但沿不同的积分路径得出的值并不相等。

例 18 计算由原点 $O(0,0)$ 到点 $A(1,1)$ 的曲线积分：

$$\int_{\mathscr{L}}(4x+2y)\mathrm{d}x+(2x-6y)\mathrm{d}y$$

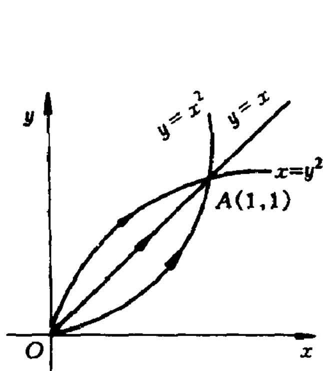


图 5-28

其中 $\mathscr{L}$ 是(1)直线 $y=x$；(2)抛物线 $y=x^2$；(3)抛物线 $y^2=x$（图 5-28）。

解： (1)化为对 x 的定积分。由于 $\mathscr{L}: y=x$，x 从 0 变到 1，于是

$$\begin{aligned}&\int_{\mathscr{L}}(4x+2y)\mathrm{d}x+(2x-6y)\mathrm{d}y\\&=\int_0^1(4x+2x+2x-6x)\mathrm{d}x\\&=\int_0^1 2x\mathrm{d}x=1\end{aligned}$$

(2)化为对 x 的定积分。由于 $\mathscr{L}: y=x^2$，x 从 0 变到 1，所以

$$\begin{aligned}&\int_{\mathscr{L}}(4x+2y)\mathrm{d}x+(2x-6y)\mathrm{d}y\\&=\int_0^1(4x+2x^2)\mathrm{d}x+(2x-6x^2)\cdot 2x\mathrm{d}x\\&=\int_0^1(4x+6x^2-12x^3)\mathrm{d}x=1\end{aligned}$$

(3)化为对 y 的定积分，由于 $\mathscr{L}: x=y^2$，y 从 0 变到 1，所以

$$\begin{aligned}&\int_{\mathscr{L}}(4x+2y)\mathrm{d}x+(2x-6y)\mathrm{d}y\\&=\int_0^1(4y^2+2y)\cdot 2y\mathrm{d}y+(2y^2-6y)\mathrm{d}y\\&=\int_0^1(8y^3+6y^2-6y)\mathrm{d}y=1\end{aligned}$$

从例 18 看出，虽然沿不同的路线积分，但曲线积分的值可以相等。

例 19 设有一质量为 m 的质点受重力作用在铅直平面上沿某一光滑曲线弧从点 A 移动到点 B，求重力所做的功。

解： 取水平直线为 x 轴，y 轴铅直向下，（图 5-29），则重力在坐标轴上的投影分别为 $P(x,y)=0$、$Q(x,y)=mg$，这里 g 是重力加速度，于是，当质点从点 $A(x_0,y_0)$ 移动到点 $B(x_1,y_1)$ 时，重力所做的功为

$$\begin{aligned}W&=\int_{\overset{\frown}{AB}}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_{\overset{\frown}{AB}}mg\mathrm{d}y\\&=\int_{y_0}^{y_1}mg\mathrm{d}y=mg(y_1-y_0)\end{aligned}$$

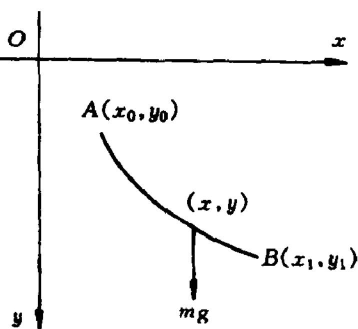


图 5-29

此结果表明，这里重力所做的功与路径无关，仅取决于下

降的距离。

通过例 17、18、19 我们知道，对坐标的曲线积分沿不同路径从起点到终点的积分值有的相同，有的不同。不同的值与路径亦有关；相同的值，仅与曲线的起点和终点有关，而与积分曲线的路径无关。对相同的值的情形，物理中把这种力叫保守力，否则称为非保守力。

关于对坐标的曲线积分的概念及计算公式也可以类似地推广到空间曲线弧 Γ 的情形。

小　　结

本章的主要内容是二重积分、第一与第二类曲线积分的概念、性质和计算法，对二重积分的应用也作了一些介绍。

1. 二重积分是定积分的推广，与定积分有着类似的定义和性质。对于二重积分的计算，关键是如何化二重积分为累次积分，从而转化为定积分的计算。化二重积分为累次积分，首先要画出积分区域的图形，借助几何直观，判别积分区域的类型，从而选择恰当的积分次序及准确的积分限。其次还要根据积分区域及被积函数的特点，选择适当的坐标系以简化运算。应用二重积分解决一些实际问题，也与定积分类似，常常采用微元分析法。

2. 关于曲线积分，实际上还是定积分概念的推广。对弧长及对坐标的曲线积分，都有着很强的实际背景。关于对弧长的曲线积分应注意与积分路线的方向是无关的；而对坐标的曲线积分与积分路线的方向有关，方向相反则整个积分要改变符号。两种类型曲线积分的计算，应用已学过的微积分方面的知识都可以化为定积分的方法来计算。

习　　题

1. 根据二重积分的性质，比较下列积分的大小。

(1) $\iint\limits_D (x+y)^2 \mathrm{d}\sigma$ 与 $\iint\limits_D (x+y)^3 \mathrm{d}\sigma$，其中 $D: x=0, y=0, x+y=1$ 所围成的区域。

(2) $\iint\limits_D (x+y)^2 \mathrm{d}\sigma$ 与 $\iint\limits_D (x+y)^3 \mathrm{d}\sigma$，其中 D：圆周 $(x-2)^2+(y-1)^2=2$ 所围成的区域。

2. 化二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 为累次积分（分别列出对两个变量先后次序不同的两个累次积分）。

(1)　D：以 $(0,0),(1,0),(0,1)$ 为顶点的三角形区域

(2)　D：由 $y=x, y^2=4x$ 所围成的区域

(3)　D：由 $y=0, x^2+y^2=a^2(y\geqslant 0)$ 所围成的区域

(4)　D：由 $y=x, x=2$ 及 $xy=1(x>0)$ 所围成的区域

3. 改变下列积分的次序。

(1)　$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_x^{2x} f(x,y)\mathrm{d}y$

(2) $\int_1^{e} dx \int_0^{\ln x} f(x,y) dy$

(3) $\int_0^{2} dy \int_{y^2}^{2y} f(x,y) dx$

(4) $\int_0^{1} dy \int_0^{2y} f(x,y) dx + \int_1^{3} dy \int_0^{3-y} f(x,y) dx$

4. 计算下列二重积分。

(1) $\iint\limits_D \sin x \sin y \, dx dy \quad D: 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} \quad 0 \leqslant y \leqslant \pi$。

(2) $\iint\limits_D (x^2 + y) dx dy \quad D: y = x^2, y^2 = x$ 所围成的区域。

(3) $\iint\limits_D x\cos(x + y) dx dy \quad D:$ 以$(0,0),(\pi,0),(\pi,\pi)$为顶点的三角形区域。

(4) $\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2} dx dy \quad D: x = 2, y = x, xy = 1$ 所围成的区域。

(5) $\iint\limits_D \frac{\sin y}{y} dx dy \quad D: y = x, x = y^2$ 所围成的区域。

(6) $\iint\limits_D (x^2 + y^2 - x) dx dy \quad D: y = 2, y = x, y = 2x$ 所围成的区域。

5. 利用极坐标计算下列二重积分。

(1) $\iint\limits_D e^{x^2+y^2} dx dy \quad D: x^2 + y^2 \leqslant 4$

(2) $\iint\limits_D x^3 y^2 dx dy \quad D: x^2 + y^2 \leqslant 4, x \geqslant 0, y \geqslant 0$

(3) $\iint\limits_D \ln(1 + x^2 + y^2) dx dy \quad D: x^2 + y^2 \leqslant 1, \quad x \geqslant 0, y \geqslant 0$

(4) $\iint\limits_D (4 - 2x - 3y) dx dy \quad D: x^2 + y^2 \leqslant 9$

(5) $\iint\limits_D \sin\sqrt{x^2 + y^2} dx dy \quad D: \pi^2 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4\pi^2$

(6) $\iint\limits_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx dy \quad D:$ 由 $x^2 + y^2 = ax(a > 0)$ 所围成的区域。

6. 由 $y^2=2x$ 及 $x=\frac{1}{2}$ 所围成的抛物线弓形平板，其面密度为 $\rho(x,y)=xy^2$，求其质量。

7. 求由椭圆抛物面 $z=1-4x^2-y^2$ 及 xOy 平面所围成的立体的体积。

8. 求由 $x+y=a(a>0), x=0, y=0$ 所围成的均匀的等腰三角形薄板的重心。

9. 求由 $y^2=\frac{1}{2}x, x=2$ 所围成的均匀薄板（面密度为 ρ），对 Ox 轴、Oy 转的转动惯量。

10. 求下列对弧长的曲线积分。

(1) $\int_{\mathscr{L}} x\sin y \, ds$ 其中 $\mathscr{L}$ 为曲线 $x = 3t, y = t(0 \leqslant t \leqslant \pi)$。

(2) $\int_{\mathscr{L}}(x+y)\mathrm{d}s$　其中 $\mathscr{L}$ 是连接(1,0),(0,1)两点间的直线段。

(3) $\oint_{\mathscr{L}}x\mathrm{d}s$　其中 $\mathscr{L}$ 是由 $y=x$、$y=x^2$ 所围区域的整个边界曲线。

(4) $\oint_{\mathscr{L}}\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s$　其中 $\mathscr{L}$ 为由 $x^2+y^2=a^2$, $y=x$, $y=0$ 在第一象限内所围成扇形的整个边界曲线。

11. 计算下列对坐标的曲线积分。

(1) $\int_{\mathscr{L}}y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y$　其中 $\mathscr{L}$ 为圆周 $x=a\cos t$, $y=a\sin t$　由 $t=0$ 到 $t=\frac{\pi}{2}$ 的一段。

(2) $\int_{\mathscr{L}}(x^2-y^2)\mathrm{d}x$　其中 $\mathscr{L}$ 是抛物线 $y=x^2$ 上从点(0,0)到点(2,4)的一段弧。

(3) $\oint_{\mathscr{L}}xy\mathrm{d}x$　其中 $\mathscr{L}$ 为圆周 $(x-a)^2+y^2=a^2(a>0)$ 及 x 轴所围成的在第一象限内区域的整个边界(按逆时针方向绕行)。

(4) $\int_{\mathscr{L}}(x+y)\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y$　其中 $\mathscr{L}$ 是:

i) 抛物线 $y^2=x$ 上从点(1,1)到点(4,2)的一段弧;

ii) 从点(1,1)到点(4,2)的直线段;

iii) 先沿直线从点(1,1)到点(1,2),然后再沿直线到点(4,2)的折线。

(蔡利亚　赵玉荣　马建忠)

第六章 常微分方程

微分学和积分学是从已知的函数出发,来研究它的导数及原函数等问题。但是,在许多实际问题中,变量之间的函数关系往往不能直接得到,有时需要我们对问题进行分析,利用问题中所提供的条件,列出含有未知函数(即所要求的函数)的导数(或微分)的方程,然后从方程中解出未知函数。这类方程就是本章所要讨论的微分方程。本章主要介绍微分方程的基本概念,常用的一、二阶微分方程的解法及其在医学方面应用的实例。

6.1 微分方程的基本概念

下面我们通过几何学和物理学中的两个实例来介绍微分方程的基本概念。

例 1 一曲线通过点(1,2),且在该曲线上任意点 $M(x,y)$处的切线的斜率为 $2x$,求这曲线的方程。

解: 根据导数的几何意义,可知所求曲线 $y=y(x)$应满足方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x \text{ 或 } \mathrm{d}y=2x\mathrm{d}x \tag{6-1}$$

对方程两端积分,得

$$y=\int 2x\mathrm{d}x \quad \text{即 } y=x^2+C \tag{6-2}$$

其中 C 为任意常数。式(6-2)即是在点 $M(x,y)$处切线斜率为 $2x$ 的所有曲线族。

此处,所求曲线 $y=y(x)$还应满足下列条件

$$x=1 \text{ 时}, y=2 \qquad \text{或记作} \quad y|_{x=1}=2 \tag{6-3}$$

将式(6-3)代入式(6-2),得 $2=1^2+C$,由此定出 $C=1$。把 $C=1$ 代入式(6-2),即得所求曲线方程

$$y=x^2+1 \tag{6-4}$$

例 2 质量为 m 的物体从空中自由下落,若略去空气阻力,求物体下落的距离 s 与时间 t 的函数关系 $s(t)$。

解: 据牛顿第二运动定律可知,未知函数 $s(t)$应满足方程

$$m\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}=mg, \text{即} \quad \frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}=g \tag{6-5}$$

对方程两端积分一次,得

$$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\int g\mathrm{d}t, \text{即 } v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=gt+C_1 \tag{6-6}$$

再积分一次,得

$$s=\int(gt+C_1)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2 \tag{6-7}$$

其中 C_1、C_2 都是任意常数。

此外，设运动开始时，物体的初始速度和初始位移为零，则 $s(t)$ 还应满足下列条件

$$s|_{t=0} = 0, \quad v|_{t=0} = 0 \tag{6-8}$$

把条件式(6-8)代入式(6-6)和式(6-7)，得 $C_1 = 0$、$C_2 = 0$，于是得距离 s 与时间 t 的函数关系：

$$s = \frac{1}{2}gt^2 \tag{6-9}$$

微分方程的基本概念如下：

1. 微分方程

一般地，把含有未知函数的导数(或微分)的方程，称为微分方程(differential equation)。未知函数是一元函数的微分方程称为常微分方程(ordinary differential equation)。未知函数是多元函数的微分方程称为偏微分方程(partial differential equation)。如例 1 中的(6-1)和例 2 中的(6-5)都是常微分方程。本章我们只讨论常微分方程，以后简称微分方程或方程。

2. 微分方程的阶

将微分方程中所含未知函数的导数(或微分)的最高阶数称为这个微分方程的阶(order)。阶为 n 的微分方程称为 n 阶微分方程。如：(6-1)和(6-5)分别为一阶和二阶微分方程。

3. 微分方程的解

凡是代入微分方程后，能使之成为恒等式的函数，称为微分方程的解(solution)。可以验证(6-2)和(6-4)都是方程(6-1)的解；(6-7)和(6-9)都是方程(6-5)的解。注意：在微分方程的解中，有的含有任意常数，有的不含任意常数。一般地，不含任意常数的解，称为微分方程的特解(particular solution)。如(6-4)和(6-9)分别是方程(6-1)和(6-5)的特解。若解中含有独立任意常数，且独立任意常数的个数与方程的阶数相同，把这样的解称为微分方程的通解(general solution)。如(6-2)和(6-7)分别是方程(6-1)和方程(6-5)的通解。所谓独立任意常数，是指它们不能合并起来用较少的任意常数来代替。例如：$C_1 + C_2x + C_3x^2$ 中的任意常数 C_1、C_2 和 C_3 就不能合并起来用较少(一个或二个)的任意常数来代替，所以任意常数 C_1、C_2、C_3 是独立的。而 $C_1x + C_2x$ 中的任意常数 C_1 和 C_2 就不是独立的，因为 C_1 和 C_2 可以合并起来用一个任意常数 $C_3(C_3 = C_1 + C_2)$ 来代替。

4. 初始条件

通常，微分方程的特解可用该解应满足的条件来确定通解中的任意常数后得到。一般地，将用来确定通解中任意常数的条件称为初始条件(initial condition)。如式(6-3)、式(6-8)均为初始条件。

5. 解微分方程

寻求微分方程的解的过程称为解微分方程(find solution)。

6.2 一阶微分方程

6.2.1 可分离变量的微分方程

一、可分离变量的微分方程

【定义 1】 形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x)g(y) \tag{6-10}$$

的方程,称为可分离变量的微分方程(variable separable differential equation)。它的特点是:方程的一端是未知函数的导数,另一端是只含 x(自变量)的函数 $f(x)$与只含 y(未知函数)的函数 $g(y)$的乘积。

解这类方程,首先将方程(6-10)改写成

$$\frac{\mathrm{d}y}{g(y)}=f(x)\mathrm{d}x$$

即将未知函数的函数 $g(y)$与自变量的函数 $f(x)$分离,$\mathrm{d}y$ 与 $\mathrm{d}x$ 分离,这就叫分离变量。

然后,两边积分。即将分离变量后所得方程的两边同时积分,从而得方程(6-10)的通解为

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{g(y)}=\int f(x)\mathrm{d}x$$

注意:用 $g(y)$除方程(6-10)的两端时,可能丢失使 $g(y)=0$ 的解,故通常通解并不一定包含方程的全部解。

例 3 (细胞的生长)在一个理想的环境中,细胞的生长速率与当时的体积成正比。若 $t=0$ 时体积为 V_0,求细胞在任意时刻 t 时的体积。

解: 设 $V(t)$表示在时刻 t 时细胞的体积,依题意有

$$\frac{\mathrm{d}V(t)}{\mathrm{d}t}=kV(t)$$

其中 $k>0$ 为比例系数。这是可分离变量的微分方程,首先分离变量,然后两边积分得

$$\int\frac{\mathrm{d}V(t)}{V(t)}=\int k\mathrm{d}t$$

即

$$\ln|V(t)|=kt+C' \qquad (C' \text{为任意常数})$$

化简后得通解为

$$V(t)=C\mathrm{e}^{kt} \qquad (C=\pm\mathrm{e}^{C'},\text{即 } C\neq 0)$$

事实上,$V(t)=0$ 也是方程$\frac{\mathrm{d}V(t)}{\mathrm{d}t}=kV(t)$的解,所以当 $C=0$ 时,$V(t)=C\mathrm{e}^{kt}$仍是此方程的解,从而上式通解中的 C 可以为任意常数。

实际上,为了运算方便,我们可以将上述方程 $\ln|V(t)|=kt+C'$中 $\ln|V(t)|$形式上记为 $\ln V(t)$,C 形式上记为 $\ln C$,则得 $\ln V(t)=kt+\ln C$,解之得 $V(t)=C\mathrm{e}^{kt}$(要记住此处 C 为任意常数),可见此形式解与上述所得最终结果是一致的。因此以后凡是遇到类

似情况，均可按此法处理。

利用问题所给的初始条件 $V(0)=V_0$，可确定 $C=V_0$，故得

$$V(t) = V_0 e^{kt}$$

这一函数关系表明，在理想环境中，细胞的体积是随时间按指数规律生长的。

一般地，若变量随时间的变化率总是正比于它自身，这个量就随时间按指数规律变化，反之亦然。

例 4 （持续性颅内压与容积的关系）医学上持续性颅内压 p 与容积 V 的关系可用如下的微分方程表示

$$\frac{dp}{dV} = ap(b-p) \tag{6-11}$$

其中 a、b 均为大于零的常数。确定 p 与 V 的函数关系。

解： (6-11)是可分离变量的微分方程，分离变量，然后两边积分

$$\int \frac{dp}{p(b-p)} = \int a dV$$

$$\frac{1}{b}\int\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{b-p}\right)dp = \int a dV$$

从而

$$\ln p - \ln(b-p) + \ln C = abV$$

即

$$\frac{Cp}{b-p} = e^{abV} \quad \text{（显然 } C \neq 0\text{）}$$

从上式中解出 p，得

$$p = \frac{b}{1 + Ce^{-abV}} \qquad (C \neq 0)$$

此函数就是逻辑斯谛(Logistic)函数，正因如此，原方程(6-11)称为逻辑斯谛方程。

例 5 （肿瘤生长模型）设 $V(t)$ 是肿瘤体积。免疫系统非常脆弱时，V 呈指数式增长。但 V 长大到一定程度后，因获取的营养不足使其增长受限制。描述 V 的一种数学模型是

$$\frac{dV}{dt} = VaV\ln\frac{\overline{V}}{V}, \quad V(0) = V_0 \tag{6-12}$$

其中 $a>0$ 为常数，$\overline{V}=V_0e^{k/a}$ 是肿瘤可能长到的最大体积。确定肿瘤的生长规律。

解： 分离变量

$$\frac{dV}{V(\ln\overline{V} - \ln V)} = a dt$$

两边积分

$$\int \frac{dV}{V(\ln\overline{V} - \ln V)} = \int a dt$$

$$\ln(\ln\overline{V} - \ln V) = -at + \ln C$$

由初始条件 $V(0)=V_0$，可确定 $C=\ln\frac{\overline{V}}{V_0}=\frac{k}{a}$，故特解是

$$V=\frac{\overline{V}}{e^{\frac{k}{a}e^{-at}}}$$

即

$$V=V_0e^{k(1-e^{-at})/a}$$

此函数是贡柏茨(Gompertz)函数,故方程(6-12)称为贡柏茨方程。实际上,若变量 x 的变化率与自身成正比;而比例系数 k 也是变量,且其变化率亦与自身成正比,即 $dx/dt=kx$ 且 $\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}t}=ak$,那么 $x=x(t)$ 就是贡柏茨型的函数。

二、可化为可分离变量的某些方程

有些微分方程,看上去并不是可分离变量的方程,但是我们可以根据方程自身的特点,通过作适当的变量代换,将其化为可分离变量的微分方程。

1. 齐次方程

【定义 2】 形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right) \tag{6-13}$$

的方程,称为齐次微分方程(homogeneous equation)。它的特点是:方程的一端是关于 $\frac{y}{x}$ 的函数。

对这类方程,作变量代换 $\frac{y}{x}=u$,即 $y=ux$,就可把齐次方程(6-13)化成如下关于 u 为未知函数的可分离变量的微分方程:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{\varphi(u)-u}{x}$$

求此方程的通解,然后再将此通解中的 u 换回 $\frac{y}{x}$ 就得齐次方程(6-13)的通解。

例 6 求方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{x}+\mathrm{tg}\,\frac{y}{x}$$

的通解。

解: 显然这是齐次方程,令 $\frac{y}{x}=u$,则原方程化为

$$u+x\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+\mathrm{tg}u$$

即

$$x\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\mathrm{tg}u$$

分离变量,然后两边积分

$$\int\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{tg}u}=\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

$$\ln\sin u=\ln x+\ln C$$

即

$$\sin u=Cx$$

将 u 用$\frac{y}{x}$代回,得原方程的通解为

$$\sin\frac{y}{x} = Cx$$

例 7 求方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x-y}{x+y}$$

的通解。

解: 将原方程右端函数的分子、分母同时除以自变量 x,于是原方程变形为如下等价方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1-\frac{y}{x}}{1+\frac{y}{x}}$$

显然这是齐次方程,令$\frac{y}{x}=u$,于是此方程化为如下方程

$$u + x\frac{du}{dx} = \frac{1-u}{1+u}$$

即

$$x\frac{du}{dx} = \frac{1-2u-u^2}{1+u}$$

分离变量,然后两边积分

$$\int\frac{1+u}{1-2u-u^2}du = \int\frac{1}{x}dx$$

$$-\frac{1}{2}\ln(1-2u-u^2) = \ln x + \ln C$$

即

$$1-2u-u^2 = \frac{1}{C^2x^2}$$

将 u 用$\frac{y}{x}$代回,得

$$1-\frac{2y}{x}-\frac{y^2}{x^2} = \frac{1}{C^2x^2}$$

所求通解为

$$C^2(x^2-2xy-y^2) = 1$$

2. $\frac{dy}{dx} = f(ax+by+C)$型方程

此类方程的特点是:方程的一端是关于自变量与未知函数的线性函数的函数。

对这类方程作变量代换

$$z = ax+by+c$$

就可把原方程化成如下关于 z 为未知函数的可分离变量的微分方程

$$\frac{dz}{dx} = a+bf(z)$$

求此方程的通解,再将通解中的 z 换回$ax+by+c$ 就可得原方程的通解。

例 8 求方程

$$\frac{dy}{dx}=(x+y)^2$$

的通解。

解： 令 $z=x+y$,则 $\frac{dz}{dx}=1+\frac{dy}{dx}$

代入原方程得

$$\frac{dz}{dx}=1+z^2$$

解此方程得通解为

$$\text{arctg}z=x+C$$

将 z 用 $x+y$ 代回得原方程通解为

$$\text{arctg}(x+y)=x+C$$

6.2.2 一阶线性微分方程

一、一阶线性微分方程

【定义 3】 如果方程中未知函数的导数(或微分)的最高阶数是一阶的,且所含未知函数及其导数(或微分)都是一次幂的,则称这种方程为一阶线性微分方程(first-order linear differential equation)。

它的标准形式是

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x) \tag{6-14}$$

其中 $P(x)$、$Q(x)$为自变量 x 的已知函数。

当 $Q(x)\equiv 0$ 时,(6-14)称为一阶线性齐次微分方程。否则,称为一阶线性非齐次微分方程。这时,$Q(x)$称为非齐次项。

显然线性齐次方程

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=0$$

是可分离变量的方程,求得通解为

$$y = Ce^{-\int P(x)dx} \tag{6-15}$$

这里 $\int P(x)dx$ 仅表示 $P(x)$ 的一个原函数。

现在讨论线性非齐次方程(6-14)的解法。把方程(6-14)改写成如下形式

$$\frac{dy}{y}=\frac{Q(x)}{y}dx-P(x)dx$$

两边积分,得

$$\ln|y|=\int\frac{Q(x)}{y}dx-\int P(x)dx$$

上式右边的第一个积分中含有未知函数 y,这个积分还不能计算。但我们知道 y 是 x 的函数,从而 $\frac{Q(x)}{y}$ 也是 x 的函数,所以这一积分就是 x 的函数,记为 $u(x)$。这样,上式就

可以写成

$$\ln|y| = u(x) - \int P(x)\mathrm{d}x$$

即
$$y = \pm \mathrm{e}^{u(x)}\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$$

令
$$C(x) = \pm \mathrm{e}^{u(x)}$$

那么
$$y = C(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x} \tag{6-16}$$

此处 $C(x)$是一个待定函数。

至此,线性非齐次方程的解虽然还没有具体求出,但已经知道其解的形式如式(6-16)。若将式(6-16)与线性齐次方程的通解(6-15)比较,则可以看出:在对应的线性齐次方程的通解中,将任意常数 C 换成x 的函数$C(x)$,便是式(6-16)。这种把对应的线性齐次方程通解中的任意常数变易为待定函数来确定线性非齐次方程通解的方法,称为“常数变易法(variation of parameter)。

下面就来确定 $C(x)$。为此,对(6-16)求导得

$$y' = C'(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x} - P(x)C(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$$

将它及式(6-16)代入式(6-14)左边得到

$$C'(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x} = Q(x)$$

解之得

$$C(x) = \int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C$$

这里 C 为任意常数。将 $C(x)$代入(6-16)式,于是得非齐次线性方程(6-14)的通解公式

$$\begin{aligned} y &= \mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left(\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C\right) \\ &= C\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x} + \mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{6-17}$$

由式(6-17)便知,一阶非齐次线性方程的通解可由两项组成:第一项 $C\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}$ 是对应的齐次线性方程的通解;第二项 $\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$ 是原方程(6-14)的一个非齐次线性方程特解,这个特解在(6-17)式中,令 $C=0$ 便可求得。

例 9 用常数变易法求一阶线性方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y\cos x = \mathrm{e}^{-\sin x}$$

的通解。

解: 先求对应齐次线性方程的通解

$$y = C\mathrm{e}^{-\int \cos x\mathrm{d}x} = C\mathrm{e}^{-\sin x}$$

然后将其中的任意常数变易为任意函数 $C(x)$。

即
$$y = C(x)\mathrm{e}^{-\sin x}$$

于是
$$y' = C'(x)\mathrm{e}^{-\sin x} - \cos x \cdot C(x)\mathrm{e}^{-\sin x}$$

将其与上式一同代入原方程得

$$C'(x)e^{-\sin x}=e^{-\sin x}$$

从而
$$C(x)=x+C$$

故原方程的通解为

$$y=(x+C)e^{-\sin x}$$

例 10 用通解公式(6-17)求一阶线性方程

$$\frac{dy}{dx}-\frac{1}{x}y=x^2$$

的通解。

解: 这里 $P(x)=-\dfrac{1}{x}, Q(x)=x^2$

故由式(6-17),得原方程通解为

$$\begin{aligned} y &= e^{\int\frac{1}{x}dx}\left[\int x^2 e^{-\int\frac{1}{x}dx}dx+C\right] \\ &= x\left[\int x dx + C\right] = x\left(\frac{1}{2}x^2+C\right) \end{aligned} \tag{6-18}$$

严格地说,上式的写法仅当 $x>0$ 时才成立。

事实上,当 $x<0$ 时,$\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|=\ln(-x)$, 从而

$$\begin{aligned} y &= e^{\int\frac{1}{x}dx}\left[\int x^2 e^{-\int\frac{1}{x}dx}dx+C\right] \\ &= e^{\ln(-x)}\left[\int x^2 e^{-\ln(-x)}dx+C\right] \\ &= (-x)\left[\int x^2\cdot\frac{1}{-x}dx+C\right]=(-x)\left(-\frac{1}{2}x^2+C\right) \\ &= x\left(\frac{1}{2}x^2-C\right) \end{aligned} \tag{6-19}$$

由于 C 是任意常数,所以式(6-18)和式(6-19)实际上是完全一样的。正因如此,以后凡是用公式(6-17)解方程而 $\int P(x)dx$ 是对数函数时,可不必在该对数内部取绝对值。

例 11 (饮食与体重关系)某人每天从食物中获取 10 500 J 热量,其中 5 040 J 用于基础代谢。他每天的活动强度,相当于每千克体重消耗 67.2 J。此外,余下的热量均以脂肪的形式储存起来,每 42 000 J 可转化为 1 kg 脂肪。问:这个人的体重是怎样随时间变化的,会达到平衡吗?

解: 解决本问题的关键,是要建立起合适的微分方程。体重 W 应是时间 t 的连续函数,题中没有直接提到它的变化率,所涉及的时间也仅仅是“每天”。因此,只能先从 $\Delta t=1$ 天的意义上着手分析体重的变化量 ΔW,依题意:他每天的进食量相当于获得 10 500/4 200 = 0.25 kg 体重,基础代谢用去 5 040/4 200 = 0.12kg,其活动消耗为每千克体重 67.2/4200 = 0.0016kg,所以 $\Delta W=(0.25-0.12-0.0016W)\Delta t$,在长为 Δt 的时间间隔内,W 的平均变化率为 $\dfrac{\Delta W}{\Delta t}=0.13-0.0016W$,因其对任意长的 Δt 皆成立,故令 $\Delta t\to 0$,从而得到

$$\frac{dW}{dt}+0.0016W=0.13$$

这是个一阶线性方程,解之得

$$W=81.25+Ce^{-0.0016t}$$

假定 $W(0)=W_0$,代入上式可确定 $C=W_0-81.25$。因此,他的体重随时间变化的函数为 $W=81.25+(W_0-81.25)e^{-0.0016t}$. 因 $t\to+\infty$时,$W\to81.25$,故他的体重会在81.25处达到平衡。

三、伯努利(Bernoulli)方程

【定义4】 形如

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n(n\neq0,1) \tag{6-20}$$

的方程称为伯努利方程。

此方程虽不是线性方程,但选择适当的变量代换可将其化成一阶线性方程。

可将式(6-20)两边同除以 y^n,得

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}+P(x)y^{1-n}=Q(x)$$

又可写成

$$\frac{1}{1-n}\frac{dy^{1-n}}{dx}+P(x)y^{1-n}=Q(x)$$

即
$$\frac{dy^{1-n}}{dx}+(1-n)P(x)y^{1-n}=(1-n)Q(x)$$

显然,作变量代换 $z=y^{1-n}$,就得到一个以 z 为未知函数的一阶线性方程:

$$\frac{dz}{dx}+(1-n)P(x)z=(1-n)Q(x)$$

求出通解 z 后,再将 z 用 y^{1-n}代回,便可得到方程(6-20)的通解。

例12 求方程$\frac{dy}{dx}-\frac{4}{x}y=x\sqrt{y}(y>0,x\neq0)$的通解。

解: 这是伯努利方程,其中 $n=\frac{1}{2}$,令 $z=y^{1-n}=\sqrt{y}$,则$\frac{dz}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{y}}\frac{dy}{dx}$,于是原方程可化为

$$\frac{dz}{dx}-\frac{2}{x}z=\frac{x}{2}$$

解此方程得

$$\begin{aligned} z &= e^{-\int-\frac{2}{x}dx}\left[\int\frac{x}{2}e^{\int-\frac{2}{x}dx}dx+C\right] \\ &= x^2\left[\int\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{x^2}dx+C\right]=x^2\left(\frac{1}{2}\ln|x|+C\right) \end{aligned}$$

再将 z 用$\sqrt{y}$代回得原方程通解为

$$y=x^4(\frac{1}{2}\ln|x|+C)^2$$

6.3 二阶微分方程

6.3.1 几种可降阶的二阶微分方程

对于某些二阶微分方程,我们常可以用换元降阶的方法把它化为一阶方程,那么我们就有可能应用前面几节中所讲的方法来求它的解。

下面,介绍在应用中比较常见的几种可降阶的微分方程的解法。

一、$y''=f(x)$型方程

这是最简单的二阶微分方程。令 $u(x)=y'$,则原方程降阶为如下方程

$$u'=f(x)$$

两端积分得

$$u(x)=\int f(x)\mathrm{d}x+C_1$$

从而

$$y'=\int f(x)\mathrm{d}x+C_1$$

再积分,得原方程通解

$$y=\int(\int f(x)\mathrm{d}x)\mathrm{d}x+C_1x+C_2$$

对于 $y^{(n)}=f(x)(n>2$,整数)型方程,可以连续积分 n 次求得通解。

例 13 求方程

$$y'''=\mathrm{e}^{2x}-\cos x$$

的通解。

解: 积分一次得

$$y''=\int(\mathrm{e}^{2x}-\cos x)\mathrm{d}x+C_1=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}-\sin x+C_1$$

再积分一次得

$$y'=\int(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}-\sin x+C_1)\mathrm{d}x+C_2$$
$$=\frac{1}{4}\mathrm{e}^{2x}+\cos x+C_1x+C_2$$

最后积分得

$$y=\int(\frac{1}{4}\mathrm{e}^{2x}+\cos x-C_1x+C_2)\mathrm{d}x+C_3$$
$$=\frac{1}{8}\mathrm{e}^{2x}+\sin x+\frac{1}{2}C_1x^2+C_2x+C_3$$

这就是所求的通解。

二、$y''=f(x,y')$型方程

此方程的特点是:右端函数表达式中不含未知函数 y. 由于 y'也是 x 的未知函数,又

$y''=(y')'$,所以,很自然地选择代换 $P(x)=y'$,这样 $P'=y''$于是原方程可降阶为以P 为未知函数的一阶方程

$$P'=f(x,P)$$

若此方程是可解的,不妨设它的通解为

$$P=\varphi(x,C_1)$$

然后,将 P 用y'代回,便得以 y 为未知函数的一阶方程

$$y'=\varphi(x,C_1)$$

对此方程两端积分,便得原方程的通解

$$y=\int\varphi(x,C_1)\mathrm{d}x+C_2$$

例 14 求方程

$$y''=\frac{2xy'}{1+x^2}$$

满足初始条件 $y|_{x=0}=1,y'|_{x=0}=3$ 的特解。

解: 根据方程的特点,可设 $P(x)=y'$,则 $P'=y''$,于是原方程降阶为

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=\frac{2xP}{1+x^2}$$

分离变量并积分得

$$\int\frac{\mathrm{d}p}{P}=\int\frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$\ln P=\ln(1+x^2)+\ln C_1$$

即

$$P=C_1(1+x^2)$$

在上式中用 y'代替P,得

$$y'=C_1(1+x^2)$$

积分得

$$y=\int C_1(1+x^2)\mathrm{d}x+C_2$$

$$=C_1(x+\frac{1}{3}x^3)+C_2$$

将初始条件 $y|_{x=0}=1$ 和 $y'|_{x=0}=3$ 分别代入得

$$\begin{cases}3=C_1(1+0)\\1=C_2\end{cases}$$

解之得 $C_1=3,C_2=1$,故所求特解是

$$y=x^3+3x+1$$

三、$y''=f(y,y')$型方程

此方程的特点是:右端函数表达式中不显含自变量 x。暂时将此方程中的 y 看作自变量。y'虽是 x 的未知函数,但又可视为 y 的未知函数,所以选择代换 $y'=P(y)$,从而 $y''=\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y}\cdot P$,从而原方程化为以 y 为自变量,以 P 为未知函数的一阶方程

$$P\frac{dP}{dy}=f(y,P)$$

解此方程,若求得它的通解是

$$P=\varphi(y,C_1)$$

再将 P 用 y'代回,得

$$y'=\varphi(y,C_1)$$

这是一个可分离变量的方程,

$$\int\frac{dy}{\varphi(y,C_1)}=x+C_2$$

解之便得原方程的通解。

例 15 求微分方程 $2yy''=1+y'^2$ 的通解。

解: 原方程可改写为 $y''=\frac{1+y'^2}{2y}$,属于 $y''=f(y,y')$型. 故令 $P(y)=y'$,则$y''=P\frac{dP}{dy}$,于是原方程降阶为

$$P\frac{dP}{dy}=\frac{1+P^2}{2y}$$

分离变量,然后两边积分

$$\int\frac{2P}{1+P^2}dP=\int\frac{1}{y}dy$$

$$\ln(1+P^2)=\ln y+\ln C_1$$

即

$$(1+P^2)=C_1y$$

再将上式中 P 用 y'代回,得

$$1+y'^2=C_1y$$

即

$$\frac{dy}{dx}=\pm\sqrt{C_1y-1}$$

解之得

$$\pm\frac{2}{C_1}\sqrt{C_1y-1}=x+C_2$$

化简得原方程的通解

$$C_1y-1=\frac{1}{4}C_1^2(x+C_2)^2$$

注意: (1)在求解第二、三两种类型微分方程的过程中,我们虽然都采用了变量代换 $P=y'$,但不可混淆。在 $y''=f(x,y')$型中,P 视为 x 的函数;在 $y''=f(y,y')$型中,P 视为 y 的函数。(2)对 $y''=f(y')$型的微分方程,它既属于第二种类型,也属于第三种类型. 此时 P 是视为 x 的函数,还是视为 y 的函数,需要根据具体方程进行选择,使得降阶后所得方程容易求解。

6.3.2 二阶线性常系数齐次方程

与一阶线性方程类似,我们可以定义二阶线性微分方程。

【定义5】 如果方程中未知函数的导数(或微分)的最高阶数是二阶的,且所含未知函数及其各阶导数(或微分)都是一次幂的,则称这种方程为二阶线性微分方程(second-order linear differential equation)。

它的一般形式是

$$A(x)y''+B(x)y'+C(x)y=f(x) \tag{6-21}$$

其中 $A(x)$、$B(x)$、$C(x)$及 $f(x)$均为自变量 x 的已知函数,且 $A(x)\neq 0$。在方程(6-21)中,若 $f(x)\equiv 0$,即

$$A(x)y''+B(x)y'+C(x)y=0 \tag{6-22}$$

我们称之为二阶线性齐次方程(homogeneous)。若 $f(x)\neq 0$,则方程(6-21)称为二阶线性非齐次方程(nonhomogeneous)。

特别地,在方程(6-21)中,若 $A(x)$、$B(x)$、$C(x)$皆恒为常数,即

$$ay''+by'+cy=f(x) \tag{6-23}$$

(其中 a、b、c 均为常数,且 $a\neq 0$)我们称之为二阶线性常系数微分方程(second-order linear differential equation with constant coefficients)。在方程(6-23)中,若 $f(x)\equiv 0$,即

$$ay''+by'+cy=0 \tag{6-24}$$

我们称之为二阶线性常系数齐次微分方程。若 $f(x)\neq 0$,则方程(6-23)我们称之为二阶线性常系数非齐次微分方程。

本节主要讨论二阶线性常系数齐次微分方程的解法。在讨论前,先介绍它的两个基本性质。

【定理 1】 若函数 $y_1(x)$和 $y_2(x)$是方程(6-24)的两个解,则其线性组合 $y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$也是方程(6-24)的解。其中 C_1、C_2 是两个任意常数。

只要把 $y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$代入方程(6-24)即可验证这一事实。详细证明略。

例如,容易验证 $y_1(x)=e^x$ 和 $y_2(x)=3e^x$ 是方程 $y''\quad y'=0$ 的两个解。由定理 1 可知 $y=C_1e^x+3C_2e^x$ 也是此方程的解。但容易判断它不是这个方程的通解。事实上,$y=C_1e^x+3C_2e^x=C_3e^x(C_3=C_1+3C_2)$,即 C_1 与 C_2 可以合并起来用一个任意常数 C_3 表示,所以 C_1 与 C_2 不是两个独立的任意常数。此处 C_1 与 C_2 之所以能合并起来,是因为 $y_1(x)/y_2(x)\equiv$常数。可想而知,若 $y_1(x)/y_2(x)\not\equiv$常数,则 C_1 与 C_2 就是二个独立的任意常数。于是给出下面的定理。

【定理 2】 若 $y_1(x)$和 $y_2(x)$是方程(6-24)的两个线性无关的特解,则 $y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$就是方程(6-24)的通解,其中 C_1 和 C_2 是两个任意常数。

所谓两个函数线性无关,是指这两个函数之比不恒为一个常数,否则称为线性相关。如 $y_1(x)=e^x$ 与 $y_2(x)=3e^x$ 就是线性相关的,而 $y_1(x)=\sin x$ 与 $y_2(x)=\cos x$ 就是线性无关的。

定理 2 给出了方程(6-24)通解的结构,所以通常叫做齐次线性方程的解的结构定理。根据这个定理,求方程(6-24)的通解问题,就归结为求它的两个线性无关的特解问题。

怎样求方程(6-24)的两个线性无关的特解呢?下面就来寻找函数 y,使得 y''、y'、y 分别乘以常数 a、b、c 后合并恒等于零。在我们所熟悉的初等函数中,哪类函数更适合呢?不难想到:指数函数 e^{rx}的一阶、二阶导数仍是同类型的函数。因此,有可能选择适当的 r,使得 $y=e^{rx}$满足方程(6-24)。

现将 $y=e^{rx}$代入方程(6-24)得

$$a(e^{rx})''+b(e^{rx})'+ce^{rx}=0$$

$$ar^2e^{rx}+bre^{rx}+ce^{rx}=0$$

即
$$(ar^2+br+c)e^{rx}=0$$

因为 $e^{rx}\neq 0$,所以必有

$$ar^2+br+c=0 \tag{6-25}$$

由此可见,只要 r 满足代数方程(6-25),函数 $y=e^{rx}$就是微分方程(6-24)的解。我们把代数方程(6-25)称为方程(6-24)的特征方程(characteristic equation)。注意特征方程(6-25)中 r^2、r 的系数及常数项恰好依次是微分方程(6-24)中 y''、y'及 y 的系数。我们把特征方程(6-25)的两个根 r_1、r_2 叫做微分方程(6-24)的特征根。这样求方程(6-24)的特解问题,就转化为求它的特征根的问题了。

方程(6-24)的特征根,可由公式

$$r_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

求出。由于判别式 b^2-4ac 的符号不同,决定了方程(6-24)的通解有不同的类型,现分三种情况讨论如下:

1. $b^2-4ac>0$

这时特征方程(6-25)有两个相异的实根 r_1 和 r_2,因此 $y_1(x)=e^{r_1x}$和 $y_2(x)=e^{r_2x}$是方程(6-24)的两个特解,由于 $e^{r_1(x)}/e^{r_2x}=e^{(r_1-r_2)x}$不为常数,所以 $y_1(x)$和 $y_2(x)$线性无关,由定理 2,方程(6-24)的通解为 $y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$($C_1$、$C_2$ 为任意常数)。

例 16 求微分方程

$$y''+y'-2y=0$$

满足初始条件 $y|_{x=0}=1, y'|_{x=0}=-2$ 的特解。

解: 所给方程的特征方程是

$$r^2+r-2=0$$

它有两个相异的实根 $r_1=-2$ 和 $r_2=1$.故原方程通解为

$$y=C_1e^{-2x}+C_2e^{x}$$

对上式求导,得

$$y'=-2C_1e^{-2x}+C_2e^{x}$$

将 $y|_{x=0}=1$ 和 $y'|_{x=0}=-2$ 分别代入通解表达式和上式,得

$$\begin{cases}C_1+C_2=1\\-2C_1+C_2=-2\end{cases}$$

解之得 $C_1=1, C_2=0$。故所求特解是 $y=e^{-2x}$

2. $b^2-4ac=0$

这时特征方程(6-25)有两个相等的实根,$r_1=r_2=\frac{b}{2a}$,由此只能得到方程(6-24)的一个特解 $y_1(x)=e^{r_1x}$,为了得到方程(6-24)的通解,我们还要求出它的一个与 $y_1(x)$线性无关的特解 $y_2(x)$。

要使 $y_2(x)$与 $y_1(x)$线性无关,设 $y_2(x)/y_1(x)=u(x)$不恒为常数,即 $y_2(x)=u(x)e^{r_1x}$,其中 $u(x)$是待定函数。将 $y_2(x)=u(x)e^{r_1x}$代入方程(6-24)并整理

$$e^{r_1x}[au''(x)+(2ar_1+b)u'(x)+(ar_1^2+br_1+C)]=0$$

由于 $e^{r_1x}\neq 0$,故必有

$$au''(x)+(2ar_1+b)u'(x)+(ar_1^2+br_1+c)u(x)=0$$

由于 $r_1=-\dfrac{b}{2a}$ 是特征方程的根,所以有

$$ar_1^2+br_1+c=0$$

及

$$2ar_1+b=0$$

又因 $a\neq 0$,因此必有

$$u''(x)=0$$

积分两次,得

$$u(x)=Ax+B$$

其中 A、B 为任意常数。因为我们只要得到一个不恒为常数的函数 $u(x)$,所以不妨取 $A=1,B=0$,即 $u(x)=x$,由此得到方程(6-24)的另一个特解 $y_2(x)=xe^{r_1x}$。从而方程(6-24)的通解为

$$y=(C_1+C_2x)e^{r_1x}$$

例 17 求方程 $4y''-4y'+y=0$ 的通解。

解: 特征方程为

$$4r^2-4r+1=0$$

其根 $r_1=r_2=\dfrac{1}{2}$ 是两个相等的实根,因此所求微分方程的通解为

$$y=(C_1+C_2x)e^{\frac{1}{2}x}$$

3. $b^2-4ac<0$

这时特征方程(6-25)有一对共轭复根:

$$r_1=\frac{-b+i\sqrt{4ac-b^2}}{2a}=\alpha+i\beta$$

$$r_2=\frac{-b-i\sqrt{4ac-b^2}}{2a}=\alpha-i\beta$$

因此 $y_1=e^{(\alpha+i\beta)x}$ 和 $y_2=e^{(\alpha-i\beta)x}$ 是方程(6-24)的两个特解,但它们是复数形式,不便于应用。为了得出实数解,我们利用欧拉(Euler)公式 $e^{\pm i\theta}=\cos\theta\pm i\sin\theta$ 把 y_1、y_2 改写成

$$y_1=e^{(\alpha+i\beta)x}=e^{\alpha x}\cdot e^{i\beta x}=e^{\alpha x}(\cos\beta x+i\sin\beta x)$$

$$y_2=e^{(\alpha-i\beta)x}=e^{\alpha x}\cdot e^{-i\beta x}=e^{\alpha x}(\cos\beta x-i\sin\beta x)$$

由定理 1 知,

$$\bar{y}_1=\frac{1}{2}(y_1+y_2)=e^{\alpha x}\cos\beta x$$

$$\bar{y}_2=\frac{1}{2i}(y_1-y_2)=e^{\alpha x}\sin\beta x$$

也是方程(6-24)的两个解,且 $\bar{y}_1/\bar{y}_2\neq$ 常数,所以微分方程(6-24)的通解为

$$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$$

C_1、C_2 为任意常数。

例 18 求方程 $y''+2y'+5y=0$ 的通解。

解： 它的特征方程为

$$r^2+2r+5=0$$

其根 $r_1=-1+2i, r_2=-1-2i$ 为一对共轭复根。则所求方程的通解为

$$y=e^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$$

以上讨论的结果可列表总结如下：

表 6-1

特征方程 $ar^2+br+c=0$ 的根	微分方程 $ay''+by'+cy=0$ 的通解
相异实根 r_1 和 r_2	$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$
重根 $r_1=r_2=-\frac{b}{2a}$	$y=(C_1+C_2x)e^{-\frac{b}{2a}x}$
共轭复根 $r_{1,2}=\alpha\pm i\beta$	$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

由此可见，求二阶常系数线性齐次方程的通解，不必进行积分，只需求其特征方程的根即可。对于二阶线性常系数非齐次方程的求解方法将在下一节中讨论。

6.4* 拉普拉斯变换及其应用

数学中经常采用变换的方法，把复杂的运算转化为比较简单的运算。例如，用对数变换可以把复杂的乘、除、乘方和开方运算转化成比较简单的加减运算。在解微分方程(组)中，如果从原方程(组)中直接求解有困难或较复杂时，常采用一种积分变换，将微分方程(组)求解问题转化为代数方程(组)求解问题。所谓积分变换，就是通过积分运算，把一个函数变成另一个函数的变换。拉普拉斯(Laplace)变换就是一种积分变换，它是解线性常系数微分方程(组)的一种有力而简便的工具。本节就来介绍拉普拉斯变换的概念、简单性质及其在求解线性常系数微分方程(组)中的应用。

6.4.1 拉普拉斯变换的概念和性质

一、拉普拉斯变换的概念

【定义 6】 设函数 $f(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 有定义，且积分

$$\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

在 s 的某一域内收敛，则由此积分所确定的函数

$$F(s)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

称为函数 $f(t)$ 的拉普拉斯变换(简称拉氏变换)，记作 $\mathscr{L}[f(t)]$。即

$$\mathscr{L}[f(t)]=F(s)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

$F(s)$ 也称为 $f(t)$ 的像函数，同时称 $f(t)$ 为 $F(s)$ 的拉氏逆变换(或称像原函数)，记作 $\mathscr{L}^{-1}[F(s)]=f(t)$。

在拉氏变换的一般理论中，s 是复数。在此我们仅限制 s 为实数的情形下加以讨论。

例 19 用定义求 $\mathscr{L}[1]$、$\mathscr{L}[e^{kt}]$及 $\mathscr{L}[\sin kt]$，其中 k 为实常数。

解： 根据定义，有

$$\mathscr{L}[1]=\int_0^{+\infty}e^{-st}dt=-\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{s}\qquad (s>0)$$

$$\mathscr{L}[e^{kt}]=\int_0^{+\infty}e^{kt}e^{-st}dt=\int_0^{+\infty}e^{-(s-k)t}dt=\frac{1}{s-k}\qquad (s>k)$$

$$\mathscr{L}[\sin kt]=\int_0^{+\infty}\sin kt\,e^{-st}dt$$

$$=\frac{-e^{-st}}{s^2+k^2}(s\sin kt+k\cos kt)\Big|_0^{+\infty}=\frac{k}{s^2+k^2}\qquad (s>0)$$

由上述例子可见，求一个函数的拉氏变换需要进行积分计算。为了使用方便，书后附录Ⅱ是拉氏变换简表，通过该表可直接查到常用函数的拉氏变换或逆变换。

二、拉普拉斯变换的性质

拉氏变换有一系列重要性质。下面仅介绍在求解常系数线性微分方程(组)中有广泛应用的三个简单而基本的性质。

1. 线性性质

若 $\mathscr{L}[f(t)]=F(s)$，$\mathscr{L}[g(t)]=G(s)$，则有

$$\mathscr{L}[af(t)\pm bg(t)]=a\mathscr{L}[f(t)]\pm b\mathscr{L}[g(t)]$$

$$\mathscr{L}^{-1}[aF(s)\pm bG(s)]=a\mathscr{L}^{-1}[F(s)]\pm b\mathscr{L}^{-1}[G(s)]$$

其中 a、b 为任意常数。读者可根据拉氏变换的定义，直接验证之。

这条性质表明函数线性组合的拉氏变换(或拉氏逆变换)等于各函数拉氏变换(或拉氏逆变换)的线性组合。

例 20 求 $\mathscr{L}[3\sin 2t+2e^t]$。

解： 根据拉氏变换的线性性质，得

$$\mathscr{L}[3\sin 2t+2e^t]=3\mathscr{L}[\sin 2t]+2\mathscr{L}[e^t]=3\cdot\frac{2}{s^2+2^2}+2\cdot\frac{1}{s-1}=\frac{2s^2+6s+2}{(s^2+4)(s-1)}$$

2. 微分性质

若 $\mathscr{L}[f(t)]=F(s)$，则

$$\mathscr{L}[f^{(n)}(t)]=s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0)$$

证明： 先考虑 $f'(t)$的拉氏变换，根据定义

$$\mathscr{L}[f'(t)]=\int_0^{+\infty}f'(t)e^{-st}dt$$

$$=\lim_{b\to+\infty}f(t)e^{-st}\Big|_0^b+s\int_0^{+\infty}f(t)e^{-st}dt$$

$$=sF(s)-f(0)=s\mathscr{L}[f(t)]-f(0)$$

这样就有了递推公式，对任何正整数 n，有

$$\mathscr{L}[f^{(n)}(t)]=s\mathscr{L}[f^{(n-1)}(t)]-f^{(n-1)}(0)$$

$$=s[s\mathscr{L}[f^{(n-2)}(t)]-f^{(n-2)}(0)]-f^{(n-1)}(0)$$

$$\vdots$$

$$= s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

这条性质能使我们将关于 $f(t)$ 为未知函数的微分方程转化为关于 $F(s)$ 为未知量的代数方程。因此，它对求解微分方程起着重要作用。

例 21 利用拉氏微分性质求 $\mathscr{L}[\cos kt]$，k 为实常数。

解： 由于

$$f(t) = \cos kt, f'(t) = -k\sin kt, f''(t) = -k^2\cos kt$$

从而 $f(0)=1, f'(0)=0$，由拉氏微分性质，有

$$\mathscr{L}[-k^2\cos kt] = \mathscr{L}[f''(t)]$$
$$= s^2\mathscr{L}[f(t)] - sf(0) - f'(0)$$

即
$$-k^2\mathscr{L}[\cos kt] = s^2\mathscr{L}[\cos kt] - s$$

从而
$$\mathscr{L}[\cos kt] = \frac{s}{s^2+k^2}$$

例 22 利用拉氏微分性质，求 $\mathscr{L}[t^m]$，其中 m 是正整数。

解： 令 $f(t) = t^m$

由于 $f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(m-1)}(0) = 0$，而 $f^{(m)}(t) = m!$

由拉氏微分性质，有

$$\mathscr{L}[m!] = s^m\mathscr{L}[f(t)] - s^{m-1}f(0) - s^{m-2}f'(0) - \cdots - f^{(m-1)}(0)$$

即
$$\mathscr{L}[m!] = s^m\mathscr{L}[f(t)]$$

又
$$\mathscr{L}[m!] = m!\mathscr{L}[1] = \frac{m!}{s}$$

故
$$\mathscr{L}[f(t)] = \frac{m!}{s^{m+1}}$$

即
$$\mathscr{L}[t^m] = \frac{m!}{s^{m+1}}$$

3. 位移性质

若 $\mathscr{L}[f(t)] = F(s)$，则 $\mathscr{L}[e^{at}f(t)] = F(s-a)$

证： 因 $F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$，所以

$$\mathscr{L}[e^{at}f(t)] = \int_0^{+\infty} e^{at}f(t)e^{-st}dt = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-(s-a)t}dt$$
$$= F(s-a)$$

此条性质常给我们在求拉氏逆变换时提供很大方便。

下面举几个求拉氏逆变换的例子。

例 23 求 $\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+2s}\right]$。

解： $\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+2s}\right] = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s+2)}\right] = \frac{1}{2}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+2}\right]$

$$= \frac{1}{2}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] - \frac{1}{2}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right]$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2t}$$

例 24 求 $\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2s+3}{s^2-2s+5}\right]$。

解：

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2s+3}{s^2-2s+5}\right]=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2(s-1)+5}{(s-1)^2+2^2}\right]$$

$$=2\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s-1}{(s-1)^2+2^2}\right]+\frac{5}{2}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2}{(s-1)^2+2^2}\right]$$

而 $\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+2^2}\right]=\cos 2t,\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2}{s^2+2^2}\right]=\sin 2t$

根据位移性质，有

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s-1}{(s-1)^2+2^2}\right]=\mathrm{e}^t\cos 2t,\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2}{(s-1)^2+2^2}\right]=\mathrm{e}^t\sin 2t$$

从而 $\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2s+3}{s^2-2s+5}\right]=2\mathrm{e}^t\cos 2t+\frac{5}{2}\mathrm{e}^t\sin 2t$。

从以上两例可见，求有理分式的拉氏逆变换时，先将有理分式化为部分分式(其中部分分式的拉氏逆变换是已知的或能从拉氏变换表中直接查到)，然后求拉氏逆变换。

6.4.2 拉氏变换在解线性微分方程(组)中的应用

为了求出线性微分方程(组)的解，对给定的方程(组)取拉氏变换，利用拉氏变换的线性性质和微分性质以及方程(组)满足自变量为零的初始条件，就把微分方程(组)转化为以所求函数的拉氏变换为未知量的代数方程(组)，然后从此代数方程(组)中解出未知量，再取其逆变换，即得所要求的微分方程(组)的解。

下面举例说明。

例 25 求微分方程 $y''+4y=\sin t$ 满足初始条件 $y|_{t=0}=0,y'|_{t=0}=0$ 的特解。

解： 这是二阶线性非齐次方程，对方程两端取拉氏变换，得

$$\mathscr{L}[y''+4y]=\mathscr{L}[\sin t]$$

由线性性质得

$$\mathscr{L}[y'']+4\mathscr{L}[y]=\frac{1}{s^2+1}$$

再由微分性质得

$$s^2\mathscr{L}[y]-sy(0)-y'(0)+4\mathscr{L}[y]=\frac{1}{s^2+1}$$

代入初始条件，整理后解出

$$\mathscr{L}[y]-\frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)}=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{s^2+1}-\frac{1}{s^2+4}\right]$$

取拉氏逆变换，得

$$y=\frac{1}{3}\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)-\frac{1}{6}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2}{s^2+4}\right]$$

$$=\frac{1}{3}\sin t-\frac{1}{6}\sin 2t$$

这就是所求微分方程的特解。

例 26 求微分方程 $y''+2y'-3y=\mathrm{e}^{t}$ 满足初始条件 $y(0)=0,y'(0)=1$ 的特解。

解： 对方程两端取拉氏变换，得

$$\mathscr{L}[y'']+2\mathscr{L}[y']-3\mathscr{L}[y]=\frac{1}{s+1}$$

再由微分性质得

$$s^2\mathscr{L}[y]-sy(0)-y'(0)+2[s\mathscr{L}[y]-y(0)]-3\mathscr{L}[y]=\frac{1}{s+1}$$

代入初始条件后,整理得

$$s^2\mathscr{L}[y]+2s\mathscr{L}[y]-3\mathscr{L}[y]=\frac{s+2}{s+1}$$

从中解出

$$\mathscr{L}[y]=\frac{s+2}{(s-1)(s+1)(s+3)}$$
$$=\frac{-\frac{1}{4}}{s+1}+\frac{\frac{3}{8}}{s-1}+\frac{-\frac{1}{8}}{s+3}$$

取拉氏逆变换,得

$$y=-\frac{1}{4}\mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{s+1}]+\frac{3}{8}\mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{s-1}]-\frac{1}{8}\mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{s+3}]$$
$$=-\frac{1}{4}e^{-t}+\frac{3}{8}e^{t}-\frac{1}{8}e^{-3t}$$

这就是所要求的特解。

由以上两例可见,用拉氏变换求满足自变量为零的初始条件的特解是方便的,它省略了以往从通解中确定任意常数的复杂运算过程。

例 27 (热量交换方程)处理 X 光片时,为使在不冲淡显影液的前提下稍稍提高其温度,把 50 ml 的 90 ℃热水装在小塑料杯里再漂浮在这 5000 ml 的显影液中,设此时试剂温度为 10 ℃。问试剂温度将如何变化?

解: 牛顿(Newton)冷却定律是说物体温度 T 的变化率正比于 T 与所处环境温度 T_0 之差,即

$$\frac{dT}{dt}=k(T-T_0) \tag{6-26}$$

这是在环境温度 T_0 保持不变的前提下。可是现在,由于介质(5000 ml 试剂)的体积并不比热源(50 ml 水)大很多,故两者的温度都在改变,因而不能引用定律(6-26)。但是这里,两者之间的热量是守恒的(对外损失的热量不计)。因此热流通量(不是温度)的变化率与两者的温差成正比。记 T_1 和 T_2 为热水和试剂的温度,V_1 和 V_2 为两者的体积,两者的热量分别是 V_1T_1 和 V_2T_2,所以

$$\frac{d(V_1T_1)}{dt}=-\frac{d(V_2T_2)}{dt}=k'(T_2-T_1) \tag{6-27}$$

其中负号表示如果一方热量增加了,另一方就减少。式(6-27)实际上是两个方程。由 $V_1=50$, $V_2=5000$,得

$$\begin{cases}\dfrac{dT_1}{dt}=k(T_2-T_1)\\ \dfrac{dT_2}{dt}=-\dfrac{k}{100}(T_2-T_1)\\ T_1(0)=90,T_2(0)=10\end{cases}$$

可以说,我们已完成了建立模型的任务。为了求此线性方程组的解,自然想到要消去一个变量,从而转化为求解高阶线性方程的解。此法固然行得通,但计算繁琐。引入拉氏变换后,此问题就简单多了。

设 $\mathscr{L}[T_1(t)]=F_1(s)$,$\mathscr{L}[T_2(t)]=F_2(s)$,对上述两个方程的两端取拉氏变换,得

$$\begin{cases} sF_1(s)-T_1(0)=kF_2(s)-kF_1(s) \\ sF_2(s)-T_2(0)=-\dfrac{k}{100}F_2(s)+\dfrac{k}{100}F_1(s) \end{cases}$$

将初始条件代入后,得到关于 $F_1(s)$ 和 $F_2(s)$ 的线性方程组

$$\begin{cases} (s+k)F_1(s)-kF_2(s)=90 \\ kF_1(s)-(100s+k)F_2(s)=-1000 \end{cases}$$

解此方程组,得

$$F_1(s)=\frac{900s+1090k}{100s^2+101ks}=\frac{1090}{101}\cdot\frac{1}{s}+\frac{8000}{101}\cdot\frac{1}{s+\dfrac{101}{100}k}$$

$$F_2(s)=\frac{1000s+1090k}{100s^2+101ks}=\frac{1090}{101}\cdot\frac{1}{s}-\frac{80}{101}\cdot\frac{1}{s+\dfrac{101}{100}k}$$

再取拉氏逆变换,就有

$$T_1(t)=\mathscr{L}^{-1}[F_1(s)]=\frac{1090}{101}+\frac{8000}{101}e^{-101k/100}$$

$$T_2(t)=\mathscr{L}^{-1}[F_2(s)]=\frac{1090}{101}-\frac{80}{101}e^{\ 101k/100}$$

例 28 求方程组

$$\begin{cases} y''-x''+x'-y=e^t-2 \\ 2y''-x''-2y'+x=-t \end{cases}$$

满足初始条件 $y(0)=y'(0)=0, x(0)=x'(0)=0$ 的解。

解: 设 $\mathscr{L}[y(t)]=Y(s)$,$\mathscr{L}[x(t)]=X(s)$,对上述两个方程取拉氏变换,利用线性性质及微分性质,并考虑到初始条件,得到

$$\begin{cases} (s+1)Y(s)-sX(s)=\dfrac{2-s}{s(s-1)^2} \\ 2sY(s)-(s+1)X(s)=\dfrac{-1}{s^2(s-1)} \end{cases}$$

解此代数方程组,得

$$\begin{cases} Y(s)=\dfrac{1}{s(s-1)^2} \\ X(s)=\dfrac{2s-1}{s^2(s-1)^2} \end{cases}$$

再将 $Y(s)$,$X(s)$ 分解为部分分式,得

$$Y(s)=\frac{1}{s}+\frac{1}{(s-1)^2}-\frac{1}{s-1}$$

$$X(s)=-\frac{1}{s^2}+\frac{1}{(s-1)^2}$$

再取拉氏逆变换，得

$$\begin{cases} y(t)=1+e^t+te^t \\ x(t)=-t+te^t \end{cases}$$

这就是原方程组满足初始条件的特解。

小　结

本章主要内容是：1. 介绍了微分方程的基本概念。这里包括：微分方程（常微分方程，偏微分方程）、微分方程的阶，微分方程的解（特解，通解）及初始条件。需要注意(1)并不是含有任意常数的解都叫通解，通解是指含有微分方程的阶数那么多个独立任意常数的解。(2)通解并不一定包含方程的全部解。2. 介绍了常见的一、二阶微分方程的解法。这里包括分离变量法，常数变易法、降阶法（通过适当的变量代换将高阶微分方程降阶为较低阶微分方程）及拉氏变换法。需要注意：在求解二阶常系数线性齐次方程的过程中，并不需要积分，只需求出对应特征方程的根，就很容易写出通解表达式。3. 通过医学实例简单介绍建立微分方程的最基本方法。首先找出所要研究的变量及所满足的初始条件，再根据实际问题所提供的已知条件，用导数的概念或微元分析法列出方程。

此外，举例介绍了拉普拉斯变换法在解高阶线性常系数微分方程（组）中的应用。

习　题

1. 证明 $y=ax^2+bx$ 是微分方程 $y'=\frac{y}{x}+ax$ 的解。

2. 求下列一阶微分方程的通解或特解。

(1) $y'=e^{2x-y}$　　(2) $e^x dx+dx=\sin 2y dy$

(3) $(4x+xy^2)dx+(y+x^2y)dy=0$

(4) $\frac{dy}{dx}+3y=8$　　(5) $x^3dy-(yx^2-y^3)dx=0$

(6) $x\frac{dy}{dx}-y\ln\frac{y}{x}$　　(7) $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2x+y+1}-1$

(8) $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x-y}+1$　　(9) $x\frac{dy}{dx}-2y=x^3\cos 4x$

(10) $xdy-ydx-\frac{x}{\ln x}dx=0$

(11) $y'=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}, y|_{x=1}=2$

(12) $xy'+1=4e^{-y}, y|_{x=-2}=0$

(13) $xy'+y-e^x=0, y|_{x=1}=3e$

(14) $\frac{dy}{dx}-y\text{tg}x=\sec x, y|_{x=0}=\frac{\pi}{2}$

3. 求下列特殊的二阶微分方程的通解或特解。

(1) $y''=xe^x$　　(2) $y''=1+y'$

(3) $y''+2y'=4x$　　(4) $xy''-3y'=x^2$

$(5) y''=1+(y')^2$　　$(6) y''+\frac{1}{y^3}=0$

$(7) 1+yy''+y'^2=0,\ y|_{x=0}=1, y'|_{x=0}=0$

$(8) (1+x^2)y''=2xy', y|_{x=0}=0, y'|_{x=0}=1$

4. 求下列二阶线性常系数齐次微分方程的通解或特解。

$(1) y''-2y'-3y=0$　　$(2) y''+2y'+3y=0$

$(3) 4y''-12y'+9y=0$　　$(4) y''+y'=0$

$(5) y''-3y'-4y=0, y|_{x=0}=1, y'|_{x=0}=0$

$(6) y''-8y'+16y=0, y|_{x=0}=2, y'|_{x=0}=5$

$(7) 4y''+9y=0, y|_{x=0}=2, y'|_{x=0}=\frac{3}{2}$

5. 用拉氏变换法解下列线性常系数微分方程(组)。

$(1) y''-3y'+2y=4, y(0)=1, y'(0)=1$

$(2) y''+16y=32x, y(0)=3, y'(0)=-2$

$(3) y''+4y'+4y=6e^{-2x}, y(0)=-2, y'(0)=8$

$(4) y'''+y'=x+1, y(0)=y'(0)=y''(0)=0$

$(5)\begin{cases} x'(t)=x-y \\ y'(t)=5x-3y \\ x(0)=1, y(0)=2 \end{cases}$

6. 细菌繁殖的速率正比于当时存在的细菌数目。如果 2 小时后细菌的数目为原有的 2 倍,问多少时间后细菌数将为原有的 3 倍?

7. 已知^{32}P的瞬时放射速率与它当时所具有的质量成正比,且原有质量为 m_0,半衰期(质量衰减一半所需时间)为 14.3 天,试求^{32}P的放射规律(即剩余量与时间的关系)。

8. 过氧化氢在加热或有触媒作用时,分解



$$H_2O_2=H_2O+[O]$$

反应开始经 10 分钟后 H_2O_2 的浓度为 0.276 摩尔/米^3,经 20 分钟后为 0.165 摩尔,假定反应的速度与反应物的浓度成正比,试计算比例常数 k(反应速度常数)。

9. 根据牛顿冷却定律——物体在空气中冷却的速率与该物体和空气的温度差成正比。一个人的尸体被人发现泡在池塘中,池水温度是 15 ℃,尸体温度是 26 ℃。试用牛顿冷却定律推断死亡时间,比例系数 $k=-2$ ℃/小时。假定死者不幸跌入水中死亡时的体温是 37 ℃。

10. 静脉输入葡萄糖是一种重要的治疗手段。设以每分钟 k 克的固定速率输入到血液中。与此同时,血液中的葡萄糖还会转化为其它物质或转移到其它地方,其速率与血液中的葡萄糖含量成正比,比例常数为 $a(a>0)$,初始血液中葡萄糖含量为 M,试求血液中葡萄糖含量的变化规律和确定达到平衡时,血液中葡萄糖的含量。

(车　文　马建忠)

第七章　概率论基础

自然界和社会上发生的现象是多种多样的。在一定条件下必然发生(或必然不发生)的现象称为确定现象。如,向上抛一石头必然下落;在标准大气压下水加热到100 ℃时必然沸腾。然而,还有另一类现象存在:在基本条件不变的情况下,观察的实验,可能出现这种结果,也可能出现那样结果,呈现出一种偶然性,这种现象称为随机现象。例如,在相同条件下抛同一枚硬币,其结果可能是国徽面朝上,也可能数字面朝上,结果相异;又如,对某种疾病的患者用同样的方法服用同剂量的一种药物,患者可能痊愈,可能显效,可能有效,可能无效。这些都属于随机现象。那么概率论是研究什么的?它是研究随机现象的数量规律的一门数学分支。

本章叙述概率论的基础知识,包括随机事件及其概率,随机变量及其分布和数字特征,最后介绍中心极限定理。概率论在气象生物学、临床医学、数理统计、经济、军事等各个领域有着广泛的应用。

7.1　随机事件及其概率

7.1.1　随机事件

我们抛一枚硬币,观察正面(国徽面)和反面出现情况;掷一颗骰子,观察出现的点数。通过观察这两个试验都具有共同特性:(1)可以在相同条件下重复地进行;(2)每次试验的可能结果不止一个,并且事先能明确试验的所有可能结果;(3)进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现。在概率论中,我们将具有这三个特性的试验称为随机试验(random experiment),简称试验。一般来说,我们就是通过研究随机试验研究随机现象的。

【定义1】 在随机试验中,可能出现的结果称为随机事件(random event),简称事件,通常用大写字母A、B、C等表示。例如掷一枚骰子,$A_i=\{出现\ i\ 点\}$,$i=1,2,\cdots,6$;$B=\{出现奇数点\}$;又如抛一枚硬币,$C=\{出现正面\}$;这些A_i、B、C都是随机事件或称事件A_i、B、C。

在一次随机实验中,每一个可能出现的结果不能再细分了,把这样的结果称为基本事件。而由两个或两个以上基本事件组合而成的事件称为复合事件。在一次试验中,$A_i=\{出现\ i\ 点\}$是一个基本事件,$B=\{出现奇数点\}$是复合事件,B是由基本事件A_1、A_3、A_5组成。基本事件是随机事件的一种情况。

在一定条件下必然出现的结果,称为必然事件(certain event),记为Ω或记为U;在一定条件下不可能出现的结果,称为不可能事件(impossible event),记为$\varnothing$,或记为V。在标准大气压下,水加热到100℃时,必然会沸腾,显然它是必然事件;相反的结果,即不沸腾就是不可能事件。必然事件和不可能事件实质上都是确定现象的表现,为了便于讨论,我们将其当作随机事件的两种极端情况来看待。

我们把随机试验的所有基本事件(所有试验可能的结果)组成的集合,称为样本空间,(sample space),记号为 Ω 或 U。例如,对上述掷骰子问题,样本空间 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$;对射击问题,可用 w_i 表示"直到第 i 次才首次击中目标",$i=1,2,\cdots$,样本空间 $\Omega=\{w_1,w_2,\cdots\}$。由于样本空间包含所有的基本事件,每次试验必出现其中某个基本事件,亦即样本空间作为事件是必然事件。对于任何一个事件包含了样本空间中的基本事件,那么事件可表示成样本空间的一个子集。又因为不包含任何基本事件的空集在每次试验中都不发生,我们把这样的空集作为不可能事件,也可用记号 $\varnothing$ 或 V 表示。

7.1.2 事件间的关系及运算

把事件与集合的概念联系起,使事件图形化,有利于研究随机现象。另外,如果某个事件发生了,就是指这个事件中的某个基本事件发生了;反之亦然。为了深入讨论随机现象,定义事件间的关系及运算如下:

1. 事件的包含(implication):若 A 发生,B 就发生,则说事件 B 包含事件 A,记为 $A\subset B$。

2. 事件的相等(equivalance):若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$,则说 A 等于 B,记为 $A - B$。

3. 事件的交(intersection):事件 A 和事件 B 同时发生称为 A 与 B 的交,记为 $A\cap B$ 或 AB(见图 7-1(a))。

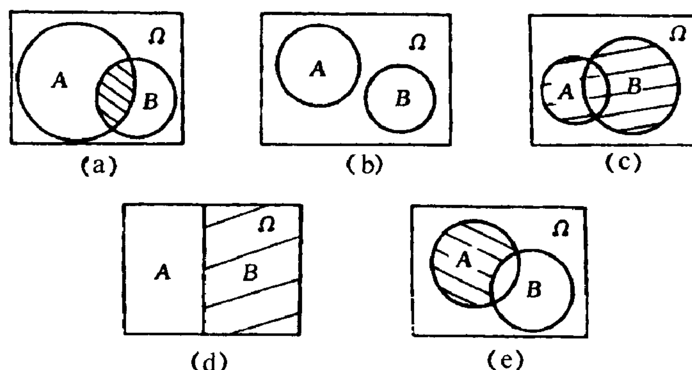


图 7-1

4. 互不相容(互斥)事件(mutual exclusive):若两个事件 A 和 B 的交 $AB=\varnothing$,则称 A 与 B 互不相容。即两事件 A 与 B 不可能同时发生(见图 7-1(b))。对于多个事件 A、B、…、Z,若任意两个事件都是互不相容的,则称多个事件是两两互不相容。

5. 事件和或并(union):事件 A 与事件 B 至少出现一个,称为 A 与 B 的和(或并),记作 $A\cup B$ 或 $A+B$(见图 7-1(c))。在本书里,A 与 B 若互不相容,A 与 B 的和亦称作 $A\cup B$ 或 $A+B$。

6. 逆(或对立)事件(complementary event):若在试验中,事件 A 与事件 B 中必然有一个发生,且仅有一个发生,亦即,事件 A 和事件 B 满足 $A\cup B=\Omega$,$AB=\varnothing$,记为 $A=B$(或 $B=\bar{A}$),见图 7-1(d)。

7. 事件 A 与事件 B 的差(Subtraction):事件 A 发生而事件 B 不发生,记 $A-B$(见图 7-1(e))。

容易证明下述几个等式成立：

(1)$A\varnothing = A$；　　(2)$A + \varnothing = A$；　　(3)$\bar{\bar{A}} = A$；

(4) $\overline{A + B} = \bar{A}\bar{B}$；　　(5) $\overline{AB} = A + \bar{B}$。

只证等式(4)，其余几个等式读者可自行证明，证明(4)如下：

任取一基本事件E，使$E \in \overline{A \cup B}$，有$E \overline{\in} A \cup B$，即$E \overline{\in} A$且$E \overline{\in} B$，所以有$E \in \bar{A}$且$E \in \bar{B}$，即$E \in \bar{A} \cap \bar{B}$。反之亦成立。从而，$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$。

例1　设有三人作尿常规化验，用A表示至少有一人不正常，B表示三人都正常，C表示三人中恰有一人不正常，试问哪些是对立事件?哪些是互斥事件?$B + C$,$A \cap C$,$A - C$各表示何实际意义?

解：　事件A与B是对立的，事件B与C是互斥事件，$B + C$表示最多一人不正常，$A \cap C = C$表示恰有一个人不正常，$A - C$表示至少有二人不正常。

例2　设A、B、C三事件，则

(1)A发生而B与C都不发生可表示为$A\bar{B}\bar{C}$或$A - B - C$或$A - (B + C)$；

(2)A与B都发生而C不发生可表示为$AB\bar{C}$或$AB - C$或$AB - ABC$；

(3)这三个事件恰好发生两个可以表示为$ABC + ABC + ABC$；

(4)这三个事件不多于一事件发生可表示为$\bar{A}B\bar{C} + ABC + BA\bar{C} + CA\bar{B}$或$\bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{C} + AC$；

(5)A、B、C不都发生可表示为$\overline{A \cdot B \cdot C}$或$AB\bar{C} + A\bar{B}\bar{C} + B\bar{A}\bar{C} + C\bar{A}\bar{B} + AB\bar{C} + ACB + BCA$。

7.1.3　随机事件的概率

对于随机事件，仅知道事件的结果是不够的，更重要的是知道各种事件的结果出现的可能性多大。为了研究这个问题，我们先引入频率的概念，然后研究事件发生的可能性大小

(一) 频率和概率的统计定义

【定义2】　在相同条件下重复进行N次随机试验中，若事件A出现m次，则比值m/N称为事件A在N次试验中出现的频率，简称为事件A的频率（the frequency of event A），记作$W(A)$，用公式表示如下：

$$W(A) = \frac{A\text{发生的次数}}{\text{试验的总次数}} = \frac{m}{N}$$

医药工作中通常说的发病率、病死率、出生率等都是频率。显然，频率具有三个性质：对任一事件A，有$0 \leqslant W(A) \leqslant 1$；必然事件的频率总等于1，记$W(\Omega) = 1$；不可能事件的频率总等于0，记$W(\varnothing) = 0$。对于频率观察，人们在实践中发现，虽然在少量的试验中看不出频率的规律性，但是经大量的重复的试验，事件出现的频率具有稳定性。下面举两个例子来说明频率的这个性质。

例3　掷一枚均匀的硬币，一次试验前不能判断出现正面还是反面；在7次或9次试验中不可能明确出现正面的频率接近50%；若进行大量重复试验，出现正面的频率应接近50%，几位数学家就验证了这个结果，见表7-1。

表 7-1 掷币实验

试验者	投掷次数 N	正面数 m	频率
De Morgran	2048	1061	0.5181
Buffon	4040	2048	0.5069
Pearson	12000	6019	0.5016
Pear son	24000	12012	0.5005

例 4 经过大量的统计,人们发现各个英文字母被使用的频率相当稳定,结果见表 7-2。

表 7-2 英文字母使用频率分布

字母	频率	字母	频率	字母	频率
空格	0.2	H	0.047	W	0.012
E	0.105	D	0.035	G	0.011
T	0.072	L	0.029	B	0.0105
O	0.0654	U	0.0255	V	0.008
A	0.063	C	0.023	K	0.003
N	0.059	F	0.0225	X	0.002
I	0.055	M	0.021	J	0.001
R	0.054	P	0.0175	Q	0.001
S	0.052	Y	0.012	Z	0.001

这些数据说明字母发生的可能性的大小具有稳定性。

频率的稳定性充分说明随机事件出现的可能性的大小是事件本身固有的一种客观属性,因此可以对它进行度量。下面给出概率的统计定义。

【定义 3】 如果在某一组条件下,当试验次数越来越多,事件 A 出现的频率稳定在某一常数 p 附近作微小摆动,称常数 p 为事件 A 的概率(probability),记作 $P(A)=p$。并称概率的这种定义为概率的统计定义。

容易分析,频率一般是不确定的数,概率则为确定的数;当试验次数足够多时,频率相当稳定,便把频率作为概率的近似值,即 $P(A)\approx W(A)$;由于频率有三条性质,概率相比之下,也有三条性质:对于任何事件 A,有 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$;对于必然事件 Ω,有 $P(A)=1$;对于不可能事件,有 $P(\varnothing)=0$。

例 5 人类的血型可以分成 A、B、O 和 AB 四种类型,伦敦的一个血液中心记录了若干年里供血者的血型,其 O 型频率 0.467,A 型频率 0.417,B 型频率 0.086,AB 型频率 0.030,那

么以频率表示概率，从英国人中随意抽出一人验血型是B型的概率为 $P(\mathrm{B})=0.086$，同理 $P(\mathrm{AB})=0.03$，$P(\mathrm{O})=0.467$，$P(\mathrm{A})=0.417$。

另外，字母的频率对各种键盘设计，信息的编码，密码的破译等有重要的意义。例如表7-2数据，把字母的序号（空格是1，E是2，……，Z是27）作为横坐标，对应的频率的对数作为纵坐标，这些数据的散点图大致呈斜率为 -1 的直线，各种文字都有类似的规律。人类DNA分子链中，总长度的3%的片断已包括了全部10万多个基因，承担了所有蛋白质和RNA复制编码的任务。另外的总长度占到97%的那些片断，常常由长短不定的分子序列大量重复而成，不表现任何功能，被称为Junk DNA。可是近来一些研究人员发现，这些片断中分子频率的特征竟然与上述规律一致！是否说明这些片断也组成了"基因文字"是一个很有吸引力的猜想。

通过大量的重复试验观察频率，然后用频率估计概率，这样做不仅麻烦而且有时也没有必要，所以我们引出较为实用的概率的古典定义。

二、概率的古典定义

我们知道掷一枚均匀的骰子，共有6个基本事件 $A_i=\{出现\ i\ 点\}$，$i=1,2,\cdots,6$，不用做大量重复试验，利用骰子本身特性，出现6个基本事件的概率均为1/6。并把具有这样特征的事件组 A_1,A_2,A_3,A_4,A_5 和 A_6，称为基本事件组。并引出概率的古典定义。

【定义4】 (cassical probability) 若随机试验有且只有 n 个基本事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，并且每个基本事件的概率都为 $\frac{1}{n}$，则把 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 称为等概基本事件组。如果事件 B 是其中 m 个基本事件之和，则定义事件 B 的概率为

$$P(B)=\frac{B\text{包含的基本事件个数}}{\text{基本事件总数}}=\frac{m}{n}$$

例6 瓶中装有30片药，其中6片已失效，从瓶中任取5片，求其中2片失效的概率？

解： 设 B 为"任取5片中有2片失效"的事件。可计算基本事件总数 $n=C_{30}^5=142506$，事件 B 包含基本事件的个数 $m=C_6^2C_{24}^3=30360$，因此，

$$P(B)=C_6^2C_{24}^3/C_{30}^5=30360/142506=0.213$$

例7 设有 n 个球，每个都能以同样的概率 $1/m$ 落到 m 个格子（$m\geqslant n$）的每一个格子中，试求：(1) 指定的 n 个格子中各有一球的概率；(2) 任何 n 个格子中各有一个球的概率。

解： 这是一个统计物理学中的古典概率问题。由于每个球可落入 $m(\geqslant n)$ 个格子中的任一个，所以 n 个球在 m 个格子中的排列相当于从 m 个元素中选取 n 个进行有重复的排列，故共有 m^n 种基本事件总数。

在第一个问题中，基本事件个数相当于 n 个球在那指定的 n 个格子中全排列 $n!$，因而所求概率等于 $n!/m^n$。

在第二个问题中，n 个格子可以任意选，即可以从 m 个格子中任意选出 n 个格子来，这种选法有 C_m^n 种，对于每种选定的 n 个格子，正如第一个问题中的全排列 $n!$，所求事件包含基本事件的个数为 $C_m^n\cdot n!$，故所求概率等于 $C_m^n\cdot n!/m^n$。

7.2 概率基本运算法则及其应用

7.2.1 概率的加法定理

【定理 1】 两个互不相容事件 A 与 B 的和事件的概率等于事件 A 的概率与事件 B 的概率之和,即 $P(A+B)=P(A)+P(B)$。

证: 按概率的古典定义来证明,设试验的可能结果是由 N 个基本事件总数构成,其中事件 A 包含 M_1 个,事件 B 包含 M_2 个,由于事件 A 与 B 互不相容,所以 A 包含的基本事件与 B 包含的基本事件一定是完全不相同的,这样一来,$A+B$ 包含的基本事件共有 M_1+M_2 个,于是得

$$P(A+B)=\frac{M_1+M_2}{N}=\frac{M_1}{N}+\frac{M_2}{N}=P(A)+P(B)$$

这一定理不难推广到有限个两两互不相容事件,下述两个推论结果由读者考虑。

【推论 1】 若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 n 个两两互不相容的事件,则有

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)$$
$$=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$$

【推论 2】 事件 A 的逆事件 $\bar{A}$ 的概率为

$$P(\bar{A})=1-P(A)$$

【定理 2】 设 A,B 为任意二事件,则

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

证: 证明思想是把 $A+B,B$ 分别分解成为互不相容的事件和,然后由定理 1 即可证明,详见图 7-2(若 A,B 互不相容,结论显然成立)。

因为 $A+B=A+(B-A)B=AB+(B-A)$,其中 $A(B-A)=\varnothing,(AB)(B-A)=\varnothing$,所以由定理 1 得

$$P(A+B)=P(A)+P(B-A)$$
$$P(B)=P(AB)+P(B-A)$$

将第二式中的 $P(B-A)$ 代入第一式中,可证

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

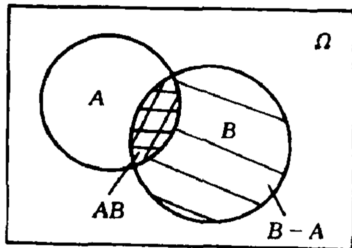


图 7-2

【推论 3】 若 A,B,C 为任意三个事件,则

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$

例 8 一批针剂共 50 支,其中 45 支是合格品,5 支是不合格品,从这批针剂中取 3 支。求其中有不合格品的概率。

解: 设 A 为"取出的3支针剂中有不合格品"事件,A_i 为"取到3支有 i 只不合格品"事件,$i=1,2,3$,显然 A_1,A_2,A_3 互不相容,且 $A=A_1+A_2+A_3$。

它们概率分别为

$$P(A_1)=\frac{C_5^1C_{45}^2}{C_{50}^3}=0.2525,\quad P(A_2)=\frac{C_5^2C_{45}^1}{C_{50}^3}=0.023$$

$$P(A_3) = \frac{C_5^3 C_{45}^0}{C_{50}^3} = 0.0005$$

由定理1可得

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = 0.276$$

其解法也可利用推论2，$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{C_5^0 C_{45}^3}{C_{50}^3} = 1 - 0.724 = 0.276$。

例9 胃癌病人接受过手术(A)、放疗(B)、中药治疗(C)的各有1/2，同时受过两种治疗方法的各有1/4，接受过三种治疗有1/8，另有部分病人因误诊等原因而未得到治疗，这样的可能性有多大？

解： 先求至少得到一种治疗的概率

$$P(A + B + C) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 7/8$$

于是得所求概率为 $P(\overline{A + B + C}) = 1 - 7/8 = 0.125$。

7.2.2 条件概率和乘法公式

在许多实际问题中，除了要知道事件 B 的概率外，往往还要知道在事件 A 已发生的条件下B出现的概率，则这种概率可认为条件概率，简记为 $P(B/A)$。例如，在美国某大学高血压研究中心就诊的306名有末端器官损害的高血压病人，按严重程度和有无心绞痛分类，各组病人数如表7-3。

表7-3 各组病人数目

	轻型至中型	重型	合计
有心绞痛史	18	7	25
无心绞痛史	243	38	281
合计	261	45	306

以 A 表示任选一名高血压病人是重型患者，以 B 表示病人无心绞痛史，则由上面数据可知：

$$P(A) = 45/306, P(B) = 281/306, P(AB) = 38/306$$

如果已经知道一名病人是重型，且无心绞痛史的条件概率 $P(B/A)$ 是多少呢？由于 A 已经发生，他肯定属于45个重型病人中的一个，在这些重型的病人中，无心绞痛史占38人，故 $P(B/A) = 38/45$。对于这个条件概率也可用另一种方法计算它的结果，即

$$P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{38/306}{45/306} = 38/45$$

因此，我们给出条件概率的定义。

【定义5】 对事件 A,B，若 $P(A) > 0$，则称

$$P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

为在事件 A 发生的条件下事件B 的条件概率(the conditional probability of B given A)。

由条件概率定义，若 $P(B) > 0$ 时，也有 B 发生的条件下事件 A 的条件概率

$P(A/B)$,即有 $P(A/B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)}$,可得 $P(AB) = P(B)P(A/B)$,所以有概率的乘法公式或乘法定理。

【定理 3】 两事件的积事件的概率等于其中一事件的概率与另一事件在前一事件出现下的条件概率的乘积:

$$P(AB) = P(A)P(B/A) = P(B)P(A/B)$$

概率的乘法公式可以推广有限多个事件的情形。例如,对于三个事件 A,B,C 有

$$P(ABC) = P((AB)C) = P(AB)P(C/AB)$$
$$= P(A)P(B/A)P(C/AB)$$

例 10 在某一人群中,聋子(A)的概率是0.005,盲人(B)的概率是0.0085,而聋子中是盲人的概率为0.12,求这个人群中任意一人,又聋又盲的概率。

解: 依题意,$P(A) = 0.005, P(B) = 0.0085, P(B/A) = 0.12$,所求概率是 $P(AB)$,由乘法公式 $P(AB) = P(A) \cdot P(B/A) = 0.005 \times 0.12 = 0.0006$,$P(A/B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)} = \dfrac{0.0006}{0.0085} \approx 0.07059$。

7.2.3 事件的独立性

对于任意事件 A,B,通常条件概率 $P(B/A)$ 与概率 $P(B)$ 是不相等的($P(B/A) \neq P(B)$),即一个事件发生改变了另一个事件发生的概率,说明事件 A 与 B 有联系,但是,生活中也有另外的一种情况存在,一个事件的发生与否不会影响另 ·事件的概率($P(B/A) = P(A)$)。例如,在一批有一定次品率的产品中,接连两次抽取产品,每次任取一件。如果第一次抽取后仍放回这批产品中,设第一次取得正品这事件为 A,第二次取得正品这事件为 B,那么,$P(B/A) = P(B)$。

【定义 6】 设 A,B 二事件,如果 $P(B/A) = P(B)$,则称事件 A 与事件 B 相互独立(B is independent of A)。

若 A 与 B 相互独立,则 $P(B/A) = P(B)$,又由乘法公式 $P(AB) = P(A)P(B/A)$,于是,$P(AB) = P(A)P(B)$ 成立。反之亦然。

【定理 4】 事件 A 与事件 B 相互独立的充分必要条件是 $P(AB) = P(A)P(B)$。

例 11 有一种治疗流行性感冒的新药,在500名流行病人中,有的服了这种药(A),有的没有服这种药($\bar{A}$),经5天后,有的痊愈(B),有的未痊愈($\bar{B}$),各种情况的人数见表7-4,其中170表示服药后痊愈(AB)的人数,其余类似。试判断这种新药对流感是否有效?

表 7-4 服药与治疗统计表

疗效	服药 A	未服药 $\bar{A}$	合计
痊愈 B	170	230	400
未愈 $\bar{B}$	40	60	100
合计	210	290	500

解: 比较服药后痊愈与未服药全愈事件概率,由于试验共500例,试验次数相当大,故可用频率近似地估计概率:

$$P(B) \approx \frac{400}{500} = 0.8, P(B/A) \approx \frac{170}{210} \approx 0.81$$

因为 $P(B)$ 与 $P(B/A)$ 几乎相等,故可认为事件 B 与 A 相互独立,表明服药和不服药对治疗效果不大,新药对流感无意义。

例 12 考虑有两个孩子的家庭,假定男女出生率一样,第一次出生的是女孩的用 A 表示,第二次出生是男孩的用 B 表示,说明 A 与 B 二事件是否相互独立。

解: 两个孩子家庭按出生先后顺序排列共有四种可能结果:(女,女),(女,男),(男,女),(男,男)。于是有

$$P(A) = \frac{2}{4}, \quad P(B) = \frac{2}{4}, \quad P(AB) = \frac{1}{4}$$

显然 $P(AB) = P(A)P(B)$,所以 A 与 B 相互独立,即 A 发生的条件下,不影响 B 的概率。

例 13 假设对50岁的男子的调查结果为:患某病的事件为 C,其概率 $P(C) = 0.25$;常吸烟用 D 事件表示,$P(D) = 0.4$;$P(CD) = 0.2$。试说明不吸烟与患某病事件是否相互独立?再求 $P(CD)/P(CD)$ 和 $P(C/D)/P(C/D)$ 并说明二比值的含义。

解: $C = CD + C\bar{D}$,等式右端二事件互不相容,由定理 1 知:

$$P(CD) = P(C) - P(CD) = 0.25 - 0.2 = 0.05$$

$$P(\bar{D}) = 1 - P(D) = 0.6,\text{又有 } P(C) = 0.25$$

因此 $P(CD) \neq P(C) \cdot P(D)$,说明不吸烟与患某病事件不是相互独立。

又因

$$P(C/D) = \frac{P(CD)}{P(D)} = 0.5, P(C/D) = \frac{P(CD)}{P(D)} \approx 0.083$$

比值:

$$\frac{P(CD)}{P(C\bar{D})} = \frac{0.2}{0.05} = 4, \frac{P(C/D)}{P(C/\bar{D})} = \frac{0.5}{0.083} \approx 6$$

前一比值表明"吸烟并患病者"是"不吸烟并患病者的概率的 4 倍,但这只是两类人人数上的比值;后一比值说明吸烟者是不吸烟者患病可能性的 6 倍,虽然两比值都说明吸烟与患病有关,但后一比值才真正反映吸烟与否而导致患病的比值。

三个事件 A,B,C,若同时成立下列四个等式

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

$$P(BC) = P(B)P(C)$$

$$P(AC) = P(A)P(C)$$

$$P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$$

则称 A,B,C 是相互独立的。若只同时成立上面等式的前三个等式(第四个等式不成立),显然 A,B,C 是两两相互独立。可见两两独立不一定相互独立,相互独立一定是两两独立。一般来说,若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立,则有

$$P(A_1A_2\cdots A_n) = P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)$$

反之 $P(A_1A_2\cdots A_n) = P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)$ 成立,$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 未必相互独立。

在实际中,事件的独立性往往不是根据定义来判断,而是根据一项试验中诸因素可经过重复试验,每次试验中的诸因素互不影响,来判断相互独立的事件。

例 14　某药厂的针剂车间灌装一批合格注射液,需经四道工序,从长期生产经验知,由于割锯时掉入玻璃屑而成废品的概率为 0.4%,由于安瓿洗涤不洁而成废品的概率为 0.2%,由于灌装时污染剂液而成废品的概率为 0.1%,由于封口不密而成废品的概率为 0.6%,求四道工序全部合格品的概率。

解:　很明显,一道工序结果好坏与另一道工序无关,即造成废品的四个因素是相互独立的,生产出合格品的四道工序也是相互独立的。设 A_i 表示"第 i 道工序合格品",$i=1,2,3,4$,由概率的乘法公式

$$\begin{aligned} P(A_1A_2A_3A_4) &= P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4) \\ &= (1-0.004)(1-0.002)\times(1-0.001)(1-0.006) \\ &= 0.9871 \end{aligned}$$

7.2.4　全概率公式与贝叶斯公式

【定理 5】　(全概率公式)设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是两两互不相容,且 $P(A_i)>0$;若 $B\subseteq A_1+A_2+\cdots+A_n$,则事件 B 的概率

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B/A_i)。$$

证:　因为 $B\subseteq A_1+A_2+\cdots+A_n$

$B=B(A_1+A_2+\cdots+A_n)=BA_1+BA_2+\cdots+BA_n$

且 $BA_1,BA_2,\cdots,BA_n$ 是两两互不相容,所以由加法定理和乘法公式

$$\begin{aligned} P(B) &= P(BA_1+BA_1+\cdots+BA_n) \\ &= P(BA_1)+P(BA_2)+\cdots+P(BA_n) \\ &= P(A_1)P(B/A_1)+P(A_2)P(B/A_2) \\ &\quad +\cdots+P(A_n)P(B/A_n) \end{aligned}$$

请注意,应用此定理时,经常抓住 $A_1+A_2+\cdots+A_n=\Omega$ 的条件,然后用全概率公式求复杂事件 B 的概率。

例 15　当怀孕妇女作首次产前检查时,有 5% 的孕妇有尿路感染的症状。在初次检查没有感染的人中,有 4% 的人在首次检查后到分娩之前这段时间里发生感染。问怀孕期间妇女曾患尿路感染的概率是多少?

解:　设 A 为"首次检查出现感染"事件,B 为"怀孕期间出现感染"事件。

依题意,$P(A)=0.05$,$P(\bar{A})=0.95$,$P(B/A)=0.04$,而 $P(B/A)=1$。显然有 $B\subseteq A+\bar{A}$,A 与 $\bar{A}$ 互相容,由全概率公式

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A)P(B/A)+P(\bar{A})P(B/A) \\ &= 0.05\times 1+0.95\times 0.04=0.088 \end{aligned}$$

【定理 6】　设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,是两两互不相容,且 $P(A_i)>0$,$i=1,2,\cdots n$,$P(B)>0$ 若 $B\subseteq A_1+A_2+\cdots+A_n$,则有

$$P(A_k/B)=\frac{P(A_kB)}{P(B)}=\frac{P(A_k)P(B/A_k)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B/A_i)},\quad k=1,2,\cdots,n$$

定理 6 是著名的贝叶斯(Bayes)公式。很多医学诊断模型都建立在此公式上,因此,

把属于这类的分析方法常叫做贝叶斯分析。贝叶斯公式的证明可直接用条件概率和全概率公式得出。

例 16 经大量临床应用知道,某种诊断肝癌的试验有下述效果:"试验反应为阳性"记为事件 B,"被诊断患肝癌"的事件为 A。据统计资料,肝癌患者试验反应为阳性的概率为0.94,即真阳性率为 $P(B/A)=0.94$,非肝癌患者试验为阴性的概率为0.96,即真阴性率为 $P(\bar{B}/\bar{A})=0.96$,对一群人进行癌症普查,假设被试验的人群中(意指某一地区)患肝癌的发病率为0.003,今有一人经试验反应为阳性,求此人患肝癌的概率?

解: 依题意,$P(A)=0.003$,$P(B/A)=0.94$,$P(\bar{A})=1-P(A)=0.997$,$P(B/\bar{A})=1-P(\bar{B}/\bar{A})=1-0.96=0.04$,所求概率为贝叶斯公式 $k=2$ 的情况:

$$
\begin{aligned}
P(A/B) &= \frac{P(A)P(B/A)}{P(A)P(B/A)+P(\bar{A})P(B/\bar{A})} \\
&= \frac{0.003\times 0.94}{0.003\times 0.94+0.997\times 0.04} \\
&= 0.066
\end{aligned}
$$

可见试验为阳性的人确实患肝癌的可能性并不大,仅为6.6%。

例 17 设某医院仓库中有10盒同样规格的X光片,已知其中有5盒、3盒、2盒依次是甲、乙、丙厂生产的,且甲、乙、丙厂生产的该种X光片的次品率分别是1/10,1/15,1/20,从这10盒中任取一盒,再从取出的这盒中任取一张X光片,抽到的X光片是正品,问所抽到的正品依次是甲、乙、丙厂生产的概率各为多少?

解: 设 A_1、A_2、A_3 分别表示取这盒X光片是甲、乙、丙厂生产的,B表示X光片是正品。则

$P(A_1)=5/10$,$P(A_2)=3/10$,$P(A_3)=2/10$,$P(B/A_1)=9/10$,$P(B/A_2)=14/15$,$P(B/A_3)=19/20$

由贝叶斯公式,可求得X光片是正品,且属于甲厂生产的概率:

$$
\begin{aligned}
P(A_1/B) &= \frac{P(A_1)P(B/A_1)}{P(A_1)P(B/A_1)+P(A_2)P(B/A_2)+P(A_3)P(B/A_3)} \\
&= \frac{5/10\times 9/10}{5/10\times 9/10+3/10\times 14/15+2/10\times 19/20} \\
&= 45/92
\end{aligned}
$$

类似可求到 $P(A_2/B)=28/92$,$P(A_3/B)=19/92$。

例 18 为探讨乳腺肿块的鉴别诊断,调查了186个病例,根据病理报告,其中乳癌(A_1)29例,纤维腺瘤(A_2)92列,乳腺病(A_3)65例。由此可得各病的概率如下:

$$
P(A_1)=\frac{29}{186}\approx 0.1559,\quad P(A_2)=\frac{92}{186}\approx 0.4946
$$

$$
P(A_3)=\frac{65}{186}\approx 0.3495
$$

在各种病发病的条件下,有关重要症候(B_{km})出现的概率 $P(B_{km}/A_i)$ 的经验估计见表7-5。

表 7-5　乳腺肿块病理统计表

症候表现		乳癌(29 例)		纤维腺瘤(92 例)		乳腺病(62 例)	
		例数	条件概率	例数	条件概率	例数	条件概率
年龄(岁)	$B_{11} < 40$	4	0.1379	74	0.8043	54	0.8308
	$B_{12} \geqslant 40$	25	0.8621	18	0.1957	11	0.1692
肿块表面	B_{21} 整齐	2	0.0690	45	0.4891	30	0.4615
	B_{22} 不整齐	27	0.9310	47	0.5190	35	0.5385
硬度	B_{31} 中	4	0.1379	6	0.0652	12	0.1846
	B_{32} 偏硬	16	0.5517	77	0.8370	49	0.7588
	B_{33} 硬	9	0.3104	9	0.0978	4	0.0616
增大速度	B_{41} 慢	3	0.1034	4	0.0435	16	0.2462
	B_{42} 中	16	0.5517	79	0.8587	46	0.7077
	B_{43} 快	10	0.4338	9	0.0978	3	0.0461
边界	B_{51} 清楚	1	0.0345	51	0.5543	19	0.2932
	B_{52} 欠清楚	24	0.8276	38	0.4130	36	0.5538
	B_{53} 不清楚	4	0.1379	3	0.0327	10	0.1539
肿块长度(cm)	$B_{61} < 2.75$	6	0.2069	69	0.7500	56	0.8615
	$B_{62} \geqslant 2.75$	23	0.7931	23	0.2500	9	0.1385

例如,乳癌 29 例中,年龄"小于 40 岁"(记为 B_{11})者 4 例,故 $P(B_{11}/A_1) = 4/9 \approx 0.1397$;年龄"不小于 40 岁"(记为 B_{12})者 25 例,故 $P(B_{12}/A_1) = 25/29 \approx 0.8621$,其余类似。现有一个病例,患者 35 岁,乳腺肿块表面整齐,偏硬,近期未见明显增大,边界不清楚,长约 2cm。如何鉴别该患者属于哪种病?

解: 该病例所出现的有关症候表现的具体组合可用符号表示为:$B = B_{11} B_{21} B_{32} B_{41} B_{53} B_{61}$ 假定各症候表现的出现与否彼此独立,则根据独立事件概率可得

$$P(B) = P(B_{11})P(B_{21})P(B_{32})P(B_{41})P(B_{53})P(B_{61})$$

在 A_1(乳癌) 发生的条件下,B 出现的概率

$$\begin{aligned} P(B/A_1) &= P(B_{11}/A_1)P(B_{21}/A_1)P(B_{32}/A_1)P(B_{41}/A_1)P(B_{53}/A_1)P(B_{61}/A_1) \\ &= 0.1379 \times 0.0690 \times 0.5517 \times 0.1034 \times 0.1379 \times 0.2069 \\ &= 1.5487 \times 10^{-5} \end{aligned}$$

同理可得 $P(B/A_2) = 3.5019 \times 10^{-4}$,$P(B/A_3) = 9.4281 \times 10^{-3}$ 于是根据贝叶斯公式,可算出在症候 B 表现的条件下,乳癌 A_1 发生的概率:

$$\begin{aligned} P(A_1/B) &= \frac{P(A_1)P(B/A_1)}{P(A_1)P(B/A_1) + P(A_2)P(B/A_2) + P(A_3)P(B/A_3)} \\ &= \frac{0.1559 \times 1.5489 \times 10^{-5}}{0.1559 \times 1.5489 \times 10^{-5} + 0.4945 \times 3.5019 \times 10^{-4} + 0.3495 \times 9.428 \times 10^{-3}} \\ &= 6.92 \times 10^{-3} \end{aligned}$$

同理 $P(A_2/B) = 4.9593 \times 10^{-2}, P(A_3/B) = 0.9435$。
取 $\max\{P(A_1/B), P(A_2/B), P(A_3/B)\} = 0.9435$,这说明该病人在他的症候表现下是乳腺病的可能性最大,所以诊断该患者乳腺病 A_3。

利用计算机快速计算的功能,总结众多著名医学专家综合治病经验(表 7-5),其诊断结果显著好于个别医生用定性指标和经验诊断的结果。这种利用计算机快速定量诊断正是目前临床医学诊断的发展方向。

7.3 随机变量及其概率

7.3.1 随机变量

如果能把随机试验的结果与实数对应起来,对我们研究随机现象会带来更大的好处,引进我们熟悉的变量概念,就能完成这个任务。比如,生化检查结果分阳性和阴性,我们用变量 X 表示,$X = 0$ 表示阴性,$X = 1$ 表示阳性。又如,急性阑尾炎患者腹部压痛的程度分为"无、轻、中、重"4 等,用变量 X 分别取"0、1、2、3"表示上面 4 种压痛感的程度。再如,测量某一年龄人的身高也可直接用变量表示,变量具体测量的值,就是随机试验的结果出现了。对"抛一枚硬币"、"掷一颗骰子"、"测量某一年龄人的体重、血压、心率"都可用类似的办法,从而随机试验的结果亦跟实数对应起来。

【定义 7】 若对于随机试验的每一个可能的结果 e,都有唯一的实数 $X(e)$ 与之对应,则称 $X(e)$ 是随机变量(random variable),简记为 X,或简记为 Y、ξ、η。

一般说来,随机试验的结果出现具有偶然性,随机变量取值也具有偶然性,试验的结果不同,随机变量取值也不同。这样一来,对随机现象的研究转化为对随机变量的研究。

最为常见的随机变量有两类,一类是离散的随机变量,另一类是连续随机变量。对于随机变量 X 所有可能取的值为有限个或无限个,则称 X 为离散随机变量;对于随机变量 X 的取值为某一区间或整个实数轴上的值,则称 X 为连续随机变量。例如某医院每天就诊人数就是离散随机变量;例如某一年龄人的身高、体重、血压、成人血浆中 α-球蛋白的含量均是连续随机变量。

7.3.2 离散随机变量的概率分布和连续随机变量的概率密度函数

我们不仅关心随机试验的结果,而且更关心某些试验结果出现的可能性的大小。试验所有可能结果已经与随机变量对应起来,因此,我们要研究随机变量取具体某些值时概率的大小。

一、离散随机变量的概率分布

【定义 8】 设 X 为一个离散随机变量,它可能取的值为 $x_1, x_2, \cdots$,这些值相应的概率为

$$P(X = x_k) = p_k \qquad (k = 1, 2, \cdots)$$

其中 $p_k \geqslant 0, \sum_k p_k = 1$。上式称为离散随机变量 X 的概率分布(the probability distribution

of discrete random variable X)。

概率分布也可以用列表的方式来表示:

$X = x_k$	x_1	x_2	$x_3 \cdots x_k \cdots$
$P(X = x_k) = p_k$	p_1	p_2	$p_3 \cdots p_k \cdots$

当概率分布写成表格形式时,就称为 X 的分布列。由分布列一目了然地看出随机变量 X 的取值范围及取这些值的概率分布情况。

例 19 设盒中有 **2** 个白球 **3** 个黑球,从中随机取 3 个球,求抽得白球数的概率分布?

解: 令 X 表示从盒中取 3 个球中的白球个数,由于只有两个白球,所以随机变量 X 可能取 0,1,2 数值,其相应概率:

$$P(X=0)=\frac{C_2^0C_3^3}{C_5^3}=\frac{1}{10}=0.1, P(X=1)=\frac{C_2^1C_3^2}{C_5^3}=\frac{2\times 3}{10}=0.6$$

$$P(X=2)=\frac{C_2^2C_3^1}{C_5^3}=\frac{1\times 3}{10}=0.3$$

或写成分布列:

$X = x_k$	0	1	2
$P(X = x_k) = p_k$	0.1	0.6	0.3

二、连续随机变量概率密度函数

对于离散随机变量关于一点的概率很有意义;对于连续随机变量研究孤立的一点概率就没有实际意义了,我们关心的是连续随机变量能够取某些区间中的所有值的概率有多大? 即 $P\{a < X \leqslant b\} = ?$,这就是概率密度函数要解决的问题。为了更好地研究概率密度函数,先介绍频率直方图,然后给出概率密度函数。

1.频率直方图简介

我们用具体实例介绍频率直方图的作法。例如,为了研究某地区 12 岁男孩身高的情况,随机地抽取 120 名男孩测得身高数据见表 7-6。

表 7-6　120 名 12 岁男孩身高数据(单位:cm)

128.1	144.4	150.3	146.2	140.6	139.7
134.1	124.3	147.9	143.0	143.1	162.0
142.7	137.6	136.9	122.7	131.8	147.7
140.8	127.6	150.7	160.3	148.5	156.9
150.4	154.3	141.2	139.7	147.5	132.9
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
133.1	142.8	136.8	133.1	144.5	142.4

分别以表 7-6 中的最小值 122.0cm、最大值 162.0cm 为始点 a 和终点 b,将区间 $[a, b]$ 分成 10 个均等的小区间,小区间长度 $\Delta x_i = 3.76 \approx 4$cm(随着试验次数 n 增大,小区间长度 Δx_i 可以任意减小),每个小区间里的身高数目定义为这个区间的频数 m_i,每个小区间的频率即为 m_i/n。这样一来根据表 7-6 数据,就可得到频率分布情况,见表 7-7。

表 7-7 频率分布表

组号 i	区间	频数 m_i	频率 m_i/n
1	[122.0,126.0]	4	0.033
2	[126.0,130.0]	9	0.075
3	[130.0,134.0]	10	0.083
4	[134.0,138.0]	22	0.183
5	[138.0,142.0]	33	0.275
6	[142.0,146.0]	20	0.167
7	[146.0,150.0]	11	0.092
8	[150.0,154.0]	6	0.050
9	[154.0,158.0]	4	0.033
10	[158.0,162.0]	1	0.008
合计		120	1

我们以随机变量身高作为横坐标 x,以$\frac{m_i}{n\Delta x_i}$作为纵坐标 y,建立直角坐标系。因此,在每个小区间上的矩形面积等于$\frac{m_i}{n\Delta x_i}\times\Delta x_i=\frac{m_i}{n}(\geqslant 0)$即等于频率,这样便得到频率直方图(图 7-3)。

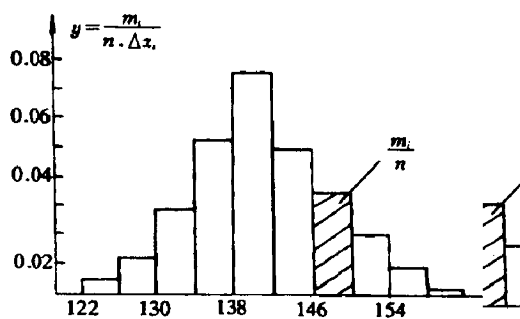


图 7-3

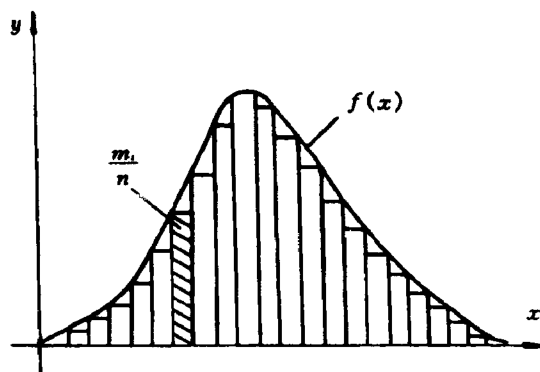


图 7-4

这个频率直方图有明显的特点,所有的矩形面积之和等于 1,且矩形面积就是频率。

2. 连续随机变量的概率密度函数

当试验次数无限增大,小区间长度无限的小,用上述同样的方法作频率直方图(见图 7-4)。矩形面积是频率,根据频率的稳定性,矩形面积不可能一会儿大,或者一会儿小,客观上矩形面积的大小只能被固定了。而且矩形面积就是概率。每一个矩形面积都被固定,频率直方图的形状就确定了,客观上存在一条曲线 $f(x)$ 描述了这个图形的形状。并且知道,曲线下的面积就是概率。因此有概率密度函数定义。

【定义 9】 对于连续随机变量 X,如果存在非负可积函数 $f(x)$,使对任意实数 a,$b(a<b)$,都有

$$P\{a<X\leqslant b\}=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

则称 $f(x)$ 为 X 的概率密度函数(probability density function),简称密度函数或概率密度。

由频率直方图和密度函数,不难理解概率密度函数 $f(x)$ 具有下列性质:

1° $f(x) \geqslant 0$;

2° $P\{-\infty < X < +\infty\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$。

按照定义,连续随机变量 X 取一点 a 的概率值为 0,即

$$P\{X = a\} = \int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$$

所以,研究一点的概率无实际意义,且 $P\{X \leqslant x\}$ 与 $P\{X < x\}$ 在数值上相等。

例 20 设 $f(x)$ 是连续随机变量密度函数,且

$$f(x) = \begin{cases} ax, & 0 < x \leqslant 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求常数 a 的值,并计算 $P\{1/3 < X \leqslant 1/2\}$ 的概率值。

解: 由密度函数性质

$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} 0\mathrm{d}x + \int_0^1 ax\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} 0\mathrm{d}x = \int_0^1 ax\mathrm{d}x = \frac{a}{2}$,因此,$a = 2$。

将其代入密度函数中,得

$$P\left\{1/3 < X \leqslant \frac{1}{2}\right\} = \int_{1/3}^{1/2} 2x\mathrm{d}x = 1/4 - 1/9$$

7.3.3 随机变量的分布函数

概率分布刻划了 $P\{X = x_k\}$ 一点的概率,概率密度函数解决区间上的概率 $P\{a < X \leqslant b\}$。而实际生活中有时也要解决随机变量 X 在区间$[-\infty, x]$上取值的概率,比如,病人的身体状况至多能承受多大剂量的放射治疗。另外,我们将离散随机变量和连续随机变量统一在一个区间$[-\infty, x]$上考虑它们的概率。

【定义 10】 设 X 是随机变量,x 是实数,以 x 为变量的函数

$$F(x) = P\{X \leqslant x\}$$

称为 X 的分布函数(distribution function)。

从上述定义,分布函数具有以下性质:

1° $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$。

2° $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$。

3° 当 $x_1 < x_2$ 时,有 $F(x_1) \leqslant F(x_2)$。

4° 对于任意实数 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$,有 $P\{x_1 < X \leqslant x_2\} = P\{X \leqslant x_2\} - P\{X \leqslant x_1\} = F(x_2) - F(x_1)$。

5° 对于离散随机变量,$F(x)$ 是右连续,即 $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} F(x) = F(x_0)$;对于连续随机变量,$F(x)$ 是连续的,即

$$\lim_{x \to x_0} F(x) = F(x_0)$$

由于概率分布和概率密度函数之间的区别,在具体计算分布函数时也有些不一样。如果 X 是离散型随机变量:

$$P\{X = x_k\} = p_k(k = 1,2,\cdots)$$

由于分布列中任意二事件 $\{X = x_k\}$ 与 $\{X = x_i\}(k \neq i)$ 是互不相容的，则由概率加法定理知 X 的分布函数为

$$F(x) = P\{X \leqslant x\} = \sum_{x_k \leqslant x} P\{X = x_k\}$$

即，对于离散随机变量

$$F(x) = P\{\ \infty < X \leqslant x\} = \sum_{x_k \leqslant x} p_k$$

式中的和号是对所有 $x_k \leqslant x$ 的 k 进行累加。

例 21　求本章例19 中的分布列

$X - x_k$	0	1	2
$P\{X - x_k$	0.1	0.6	0.3

的随机变量 X 的分布函数。

解：　当 $x < 0$ 时，$\{X \leqslant x\}$ 是不可能事件，$F(x) = P\{X \leqslant x\} = \sum_{x_k \leqslant x} p_k = 0$。

当 $0 \leqslant x < 1$ 时，$F(x) = \sum_{x_k \leqslant x} p_k = P\{X = 0\} = 0.1$

当 $1 \leqslant x < 2$ 时，$F(x) = \sum_{x_k < x} p_k = P\{X = 0\} + P\{X = 1\} = 0.1 + 0.6 = 0.7$

当 $X \geqslant 2$ 时，$F(x) - \sum_{x_k \leqslant x} p_k = P\{X = 0\} + P\{X = 1\} + P\{X = 2\} = 1$

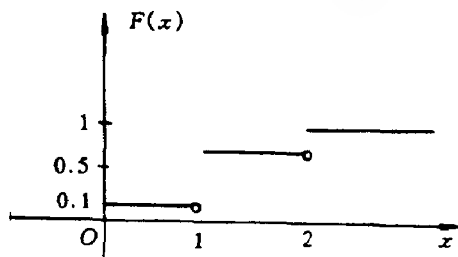


图 7-5

于是，随机变量 X 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{当 } x < 0, \\ 0.1, & \text{当 } 0 \leqslant x < 1, \\ 0.7, & \text{当 } 1 \leqslant x < 2, \\ 1, & \text{当 } 2 \leqslant 2。 \end{cases}$$

分布函数图形参见图 7-5。

如果 X 是连续随机变量，由定义 10，随机变量 X 的分布函数是

$$F(x) = P\{X \leqslant x\} = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t \ (-\infty < x < +\infty)$$

其中 $f(x)$ 是 X 的密度函数。

连续随机变量密度函数与分布函数关系是：

密度函数 $f(x)$ 在$[-\infty, x]$ 上的积分就是分布函数；分布函数 $F(x)$ 的导数就是密度函数 $f(x)$，即

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int_{-\infty}^{x + \Delta x} f(t)\mathrm{d}t - \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int_{x}^{x + \Delta x} f(t)\mathrm{d}t}{\Delta x} = f(x) \end{aligned}$$

例 22 求例20 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}2x, & 0<x\leqslant 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

的随机变量的分布函数;通过分布函数也求 $P\{1/3<X\leqslant\frac{1}{2}\}$ 的概率。

解: 因为 $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t$,所以

当 $x\leqslant 0$ 时,$F(x)=0$;

当 $0<x<1$ 时,$F(x)=\int_{0}^{x}2t\mathrm{d}t=x^2$;

当 $x\geqslant 1$ 时,$F(x)=\int_{-\infty}^{0}f(t)\mathrm{d}t+\int_{0}^{1}2t\mathrm{d}t+\int_{0}^{x}f(t)\mathrm{d}t=1$。

由上述求解归纳分布函数如下:

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{当 } x\leqslant 0,\\ x^2, & \text{当 } 0<x<1,\\ 1, & \text{当 } 1\leqslant x。\end{cases}$$

其图形如 7-6 图所示。

$$P\{1/3<X\leqslant\frac{1}{2}\}=F(\frac{1}{2})-F(\frac{1}{3})=\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}=\frac{1}{4}-\frac{1}{9}$$

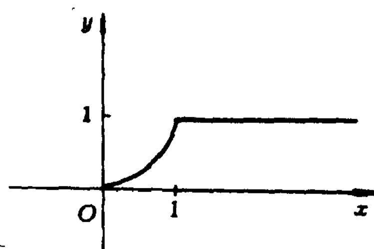


图 7-6

7.3.4 五种常见的随机变量分布

一般来说,常见的随机变量分离散型和连续型随机变量,相应的分布也得分离散型随机变量分布和连续型随机变量分布。我们先叙述常见的离散型随机量分布,它们是二点分布、二项分布、泊松分布;然后叙述常见的连续型随机变量分布,它们是均匀分布和正态分布。

一、二点分布

若一次试验只有两种结果(A 或$\bar{A}$),如药品质量检验分“合格与不合”,又如新生的婴儿分“男性与女性” 等。把结果 A 与 1 对应,结果 $\bar{A}$ 对应 0,则可定义二点分布。

【定义 11】 若随机变量 X 的分布为

$$P\{X=1\}=p,\quad P\{X=0\}=1-p$$

则称 X 服从以 $p(0<p<1)$ 为参数的二点分布,或(0-1) 分布 (two-point distribution)。

二、 二项分布

二项分布与伯努利(Bernouli)试验紧密相关。如果随机试验满足下面三个条件的试验,称为该试验为 n 重伯努利试验:

1.该试验在相同条件下重复 n 次试验;

2.每次试验只有二个结果 A 或$\bar{A}$,每次试验两种结果的概率均是 $P(A)=p,P(\bar{A})=1-p\quad(0<p<1)$;

3.在 n 重试验中,各次试验结果互不影响。

重复 n 次抛一枚硬币；某药治某病分治愈或不治愈两种结果，对 n 个病人进行治疗；这些试验均属于 n 重伯努力试验。怎样求 n 重伯努利试验的概率?我们考虑这样的概率：

求在 3 次重复试验中事件 A 刚好出现 2 次的概率?

用 $A_i(i=1,2,3)$ 表示事件 A 在第 i 次试验发生；用 $\bar{A}_i(i=1,2,3)$ 表示事件 A 在第 i 次试验中不发生。那么 3 次试验 A 出现 2 次的结果共 C_3^2 个，即

$$A_1A_2\bar{A}_3,\ A_1\bar{A}_2A_3,\bar{A}_1A_2A_3,$$

所求概率用 $P_3(2)$ 表示，由于在 C_3^2 结果中任何两种结果都是互不相容的，且各次试验相互独立，故由概率加法定理和事件独立性有

$$\begin{aligned}P_3(2) &= P\{A_1A_2\bar{A}_3+A_1\bar{A}_2A_3+\bar{A}_1A_2A_3\}\\ &= P\{A_1A_2\bar{A}_3\}+P\{A_1\bar{A}_2A_3\}+P\{\bar{A}_1A_2A_3\}\\ &= P(A_1)P(A_2)P(A_3)+P(A_1)P(A_2)P(A_3)+P(A_1)P(A_2)P(A_3)\\ &= 3p^2(1-p)^{3-2}=C_3^2p^2q^{3-2}\end{aligned}$$

其中 $q=1-p$，这就是要求的概率。

3 次重复试验事件 A 可能出现 0 次，1 次，2 次，3 次。相应地概率为

$$P_3(k)=C_3^kp^kq^{3-k}\qquad(k=0,1,2,3)$$

推广成 n 次重复试验 A 出现 k 次概率为

$$P_n(k)=C_n^kp^kq^{n-k}\qquad(k=0,1,\cdots,n)$$

【定义 12】 若随机变量 X 的概率分布

$$P_n(k)=C_n^kp^kq^{n-k}\qquad(k=0,1,\cdots,n)$$

则称 X 服从参数为 $n,p(0<p<1,q=1-p)$ 的二项分布(binomial distribution)，记作 $X\sim B(n,p)$。也可用分布列形式表示二项分布。

例 23 在100 升经消毒的自来水中，只能含有 10 个大肠杆菌，今从中取出 1 升水进行检验，问在这一升水中检出 2 个大肠杆菌的概率是多少？如果真的检查出有 2 个大肠杆菌，问这水是否合格？

解： 因为，每个大肠杆菌只有落入或不落入被抽取的这一升水中，即两种结果，每个大肠杆菌落入(A)或不落入(A)这一升水中彼此相互独立，且 $P(A)=\dfrac{1}{100}=0.01$，$P(\bar{A})=0.09$，所以，这 10 个大肠杆菌是否落入可以看作是做了 10 次独立重复试验。故所求概率

$$P_{10}(2)=C_{10}^2(0.01)^2(0.99)^{10-2}=0.0041$$

这一概率很小，小概率事件在一次试验中很难发生。如果仅做一次试验，在抽检的一升水中就发现 2 只大肠杆菌，则在很大程度上，认为这水是不合格的。

例 24 据报道，有 10% 的人对某药有肠道反应，为考核该药疗效，现任选 5 人用此药，试求：(1) 有肠道反应的人数的概率分布；(2) 不多于 2 人有肠道反应的概率；(3) 有人有反应的概率。

解： 设某人服药后有反应事件为 A，则 $P(A)=0.1,P(\bar{A})=0.9$。5 人中有肠道反应人数为随机变量 X，因此，

(1) $X\sim B(5,0.1)$，即

$$P_5(k)=C_5^k(0.1)^k(0.9)^{5-k}\qquad(k=0,1,2,\cdots,5)$$

(2) $P\{X \leqslant 2\} = \sum_{k=0}^{2} P_5(k)$

$= 0.59049 + 0.32805 + 0.07290 = 0.99144$

(3) $P\{X \geqslant 1\} = 1 - P_5(0) = 1 - 0.59049 = 0.40951$

三、泊松分布

【定义 13】 若随机变量 X 的概率分布

$$P\{X = k\} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \qquad (k = 0,1,2,\cdots)$$

则称 X 服从参数为 $\lambda(\lambda > 0)$ 的泊松分布(Poisson distribution),记作 $X \sim P(\lambda)$。

人们发现许多稀疏现象,如稀有元素含量;低发病的发病人数;单位时间内交换台呼叫的次数等均服从泊松分布。

法国数学家泊松证明泊松定理,即在一定的条件下二项分布的极限分布恰为泊松分布。正是这个定理,保证了 n 充分大,p 很小,使 $np = \lambda$,有二项分布近似等于泊松分布,即

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k} \approx \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = P\{X = k\}$$

很明显,$n(> 50)$ 很大,$P(< 0.05)$ 较小,计算二项分布很麻烦,但是有了上式近似式,用泊松分布很容易计算二项分布。

例 25 用车运送 500 件针剂药品,在运输途中药品受损坏的概率为 0.002,(1)求运输途中小于 3 件药品损坏的概率;(2)求运输途中多于 3 件药品损坏的概率。

解: 设药品在运输途中损坏的件数为随机变量 X,从而,$X \sim B(500,0.002)$,由于 $n = 500$ 相当大,$p = 0.002$ 相当小,所以可用泊松分布近似计算,取 $\lambda = np = 1$,计算时,查附录 IV。所求概率是

(1) $P\{X < 3\} = P_{500}(0) + P_{500}(1) + P_{500}(2)$

$\approx 0.3679 + 0.3679 + 0.1839 = 0.9197$

(2) $P\{X > 3\} = 1 - P\{X \leqslant 3\}$

$= 1 - (P\{X < 3\} + P_{500}(3))$

$\approx 1 - (0.9197 + 0.0613) = 0.019$

四、均匀分布

【定义 14】 设随机变量 X 在区间 $[a,b]$ 上取值,其概率密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{当 } a \leqslant x \leqslant b \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

则 X 服从区间 $[a,b]$ 上的均匀分布(uniform distribution)。

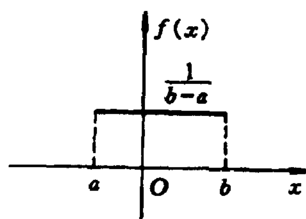
任意取 x 和 Δx,使 $a \leqslant x < x + \Delta x \leqslant b$ 成立,在 $[x, x + \Delta x]$ 上的概率等于 $\dfrac{\Delta x}{b-a}$(因为密度函数曲线下的面积就是概率,取矩形面积)。显然子区间 $[x, x + \Delta x]$ 的概率与位置 x 无关,依赖子区间的长度 Δx;另外,固定子区间长度 Δx,则说明 X 落在区间

$[a,b]$ 中任意等长的子区间内的概率相等。

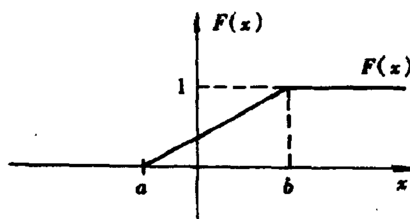
由连续随机变量的分布函数求法,可得均匀分布的分布函数

$$F(x)=\begin{cases}0, & 当 x<a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & 当 a\leqslant x\leqslant b \\ 1, & 当 x>b\end{cases}$$

均匀分布的 $f(x)$、$F(x)$ 的图形分别见图 7-7(a)和图 7-7(b)。



(a)



(b)

图 7-7

五、正态分布

1. 正态分布定义

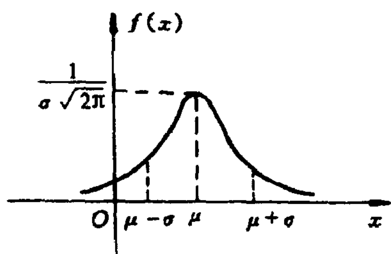
【定义 15】 设随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \qquad -\infty<x<+\infty$$

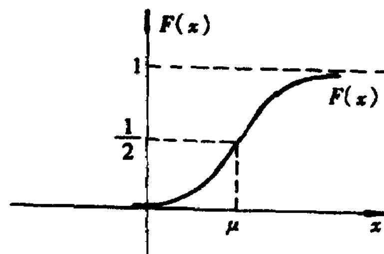
则称 X 服从参数为 μ、$\sigma(>0)$ 的正态分布(normal distribution)或高斯(Gauss)分布,记 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$。

在生物医学中所遇到的随机变量,很多都是服从或近似服从正态分布,例如某一年龄的身高、体重、舒张压、收缩压、红细胞数、胆固醇含量、成人血浆中 α - 球蛋白的含量均服从正态分布。所以正态分布在数学和医学的理论与应用中占有重要的地位。

当 $x=\mu$ 时,密度函数 $f(\mu)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ 为最大值;密度函数关于直线 $x=\mu$ 对称,并在 $x=\mu\pm\sigma$ 处各有一个拐点,当 x 趋于正负无穷时,曲线以 x 轴为渐近线,其密度函数图形见图 7-8(a)。显然正态分布的分布函数是



(a)



(b)

图 7-8

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt$$,其图形见图 7-7(b)。

参数 $\mu=0,\sigma=1$ 的正态分布,即 $X\sim N(0,1^2)$,称为标准正态分布(standard normal distribution)。标准正态分布的密度函数记为 $\varphi(x)$:

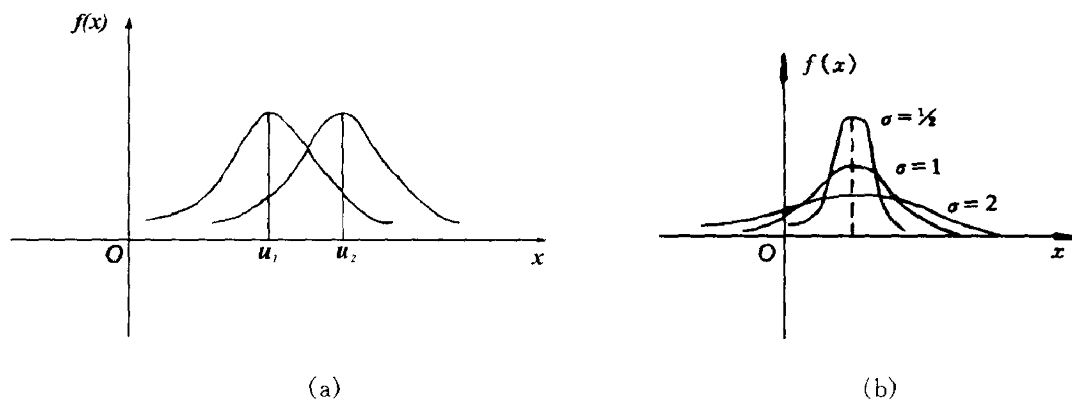
$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},\qquad -\infty<x<+\infty$$

分布函数也记为 $\Phi(x)$:

$$\Phi(x)=P\{X\leqslant x\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

2.正态分布的性质

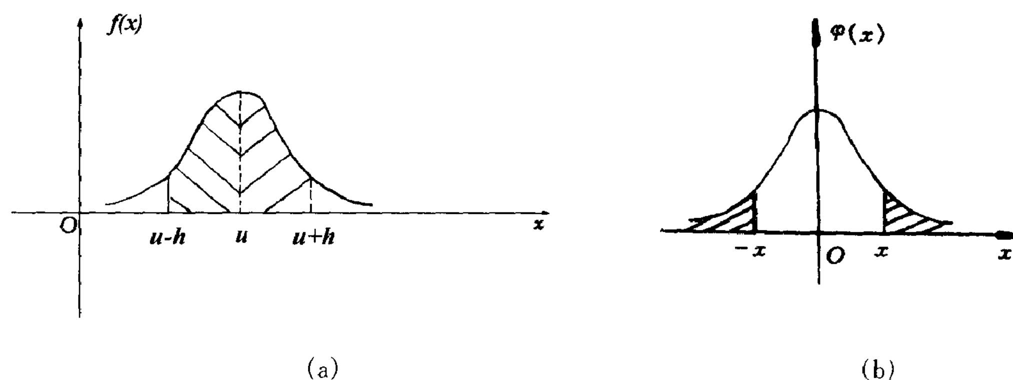
如果固定 σ,当 μ 变化时,密度函数 $f(x)$ 曲线沿 x 轴平移,而不改变图形的形状[见图 7-9(a)];如果固定 μ,改变 σ,当 σ 越小,则 $f(x)$ 在 $x=\mu$ 的取值越大,又要保持曲线 $f(x)$ 下的面积为 1,故图形变得越尖,相反,让 σ 变得越大,图形的形状变得越平坦。见图 7-9(b)。



(a) (b)

图 7-9

$f(x)$ 曲线关于 $x=\mu$ 对称。这表示对任意 $h>0$,有 $P\{\mu-h<X\leqslant\mu\}=P\{\mu<X\leqslant\mu+h\}$[见图 7-10(a)]。由于标准正态分布的密度函数[见图 7-10(b)]



(a) (b)

图 7-10

是偶函数,在 $(-\infty,-x)$ 和 $(x,+\infty)$ 两个区间上,密度函数曲线下的面积相等(概率相等),所以有

$$\Phi(-x)=1-\Phi(x)$$

一般正态分布函数通过变量代换可转化成标准正态分布函数，即

$$F(x)=\frac{1}{6\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt \xrightarrow[\sigma dy=dt]{y=\frac{t-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy=\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

因此，若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $P\{x_1<X\leqslant x_2\}=\Phi\left(\frac{x_2-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{x_1-\mu}{\sigma}\right)$

例 26 设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，试求 $P\{|X-\mu|<\sigma\}$，$P\{|X-\mu|<2\sigma\}$，$P\{|X-\mu|<3\sigma\}$。

解：

$$\begin{aligned}P\{|X-\mu|<\sigma\}&=P\{\mu-\sigma<X<\mu+\sigma\}\\&=\Phi\left(\frac{\mu+\sigma-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\mu-\sigma-\mu}{\sigma}\right)\\&=\Phi(1)-\Phi(-1)\\&=\Phi(1)-(1-\Phi(1))\\&=2\Phi(1)-1=2\times0.8413-1\\&=0.6826\end{aligned}$$

其中，查附录 V 知 $\Phi(1)=0.8413$。同理 $P\{|X-\mu|<2\sigma\}=0.9546$，$P\{|X-\mu|<3\sigma\}=0.9974$。

由例26知，随机变量 X 落在区间 $(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma)$ 内的概率大于99%，而落在此区间外的事件几乎不可能发生，这就是工业质量检查用的 3σ 原则。

例 27 设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，当 $\alpha=0.05$ 时，试确定 C，使 $P\left\{\left|\frac{X-\mu}{\sigma}\right|<c\right\}=1-\alpha$ 成立。

解：

$$\begin{aligned}P\left\{\left|\frac{X-\mu}{\sigma}\right|<c\right\}&=P\{\mu-c\sigma<X<\mu+c\sigma\}\\&=\Phi\left(\frac{\mu+c\sigma-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\mu-c\sigma-\mu}{\sigma}\right)\\&=\Phi(c)-\Phi(-c)=2\Phi(c)-1\end{aligned}$$

由题意要求 $2\Phi(c)-1=1-0.05$，即 $\Phi(c)=0.975$，查附录V标准正态分布表得 $c=1.96$。

例 28 学生 A 参加 SAT(schotastic apititude test)中的数学部分考试，得分 700 分。SAT 的分数 X 服从正态分布 $N(500,100^2)$；学生 B 参加 ACTP(America College Testing Program)考试得了 24 分，而 ACTP 的分数 Y 服从正态分布 $N(18,16^2)$，就考试得分而言，谁考得更好？

解： 参加 *SAT* 考试得分在 700 分以上的可能性为

$$\begin{aligned}P\{X\geqslant700\}&=1-P\{X<700\}\\&=1-P\left\{\frac{x-500}{100}<\frac{700-500}{100}\right\}\\&=1-\Phi(2)=1-0.97725=0.02275\end{aligned}$$

参加 *ACTP* 考试得分在 24 分以上的概率

$$\begin{aligned}P\{Y\geqslant24\}&=1-P\{Y<24\}\\&=1-P\left\{\frac{Y-18}{6}<Y<\frac{24-18}{6}\right\}\\&=1-\Phi(1)=1-0.84134=0.15866\end{aligned}$$

显然,学生 A 的成绩更好。假若都是有 1000 人参加考试,A 属于前 23 名之内,而学生 B 还没有进入前 158 名。

7.4　随机变量的数字特征

前面我们已经知道概率分布、概率密度函数、分布函数都是刻划随机变量取某些值事件的概率。然而,在许多实际问题中,需要知道随机变量的某些数字特征就行了。例如,需要知道某年级考试"平均成绩"以及"某些成绩对平均成绩的分散程度"。所谓的随机变量的数字特征,就是刻划随机变量分布的某些特征的数量指标。常用的数字特征有数学期望、方差、标准差、变异系数等,下面分别介绍。

7.4.1　随机变量的数学期望及其性质

一、 数学期望的概念

先看实例,某班 40 人,其身高为随机变量 X,X 的分布情况如下:

x /m	1.55	1.60	1.70	1.80	1.85
人数	7	10	12	6	5

则,平均身高$= \frac{1}{40}(1.55\times 7 + 1.60\times 10 + 1.70\times 12 + 1.80\times 6 + 1.85\times 5)$

$$= 1.55\times\frac{7}{40} + 1.60\times\frac{10}{40} + 1.70\times\frac{12}{40} + 1.80\times\frac{6}{40} + 1.85\times\frac{5}{40}$$

$$= x_1\times\frac{m_1}{N} + x_2\times\frac{m_2}{N} + x_3\times\frac{m_3}{N} + x_4\times\frac{m_4}{N} + x_5\times\frac{m_5}{N}$$

$$\approx 1.68(\mathrm{m})$$

由概率的统计定义,n 足够大时,频率$\frac{m_i}{N}$近似等于概率p_i。所以,当 n 足够大时,随机变量的平均趋势就近似为$\sum x_ip_i$,因此,给出离散随机变量的数学期望定义。

【定义 16】 设 X 是离散型随机变量,其值取 $x_1,x_2,\cdots$ 对应的概率为 $p_1,p_2,\cdots$ 如果级数

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_ip_i$$

存在,则把它称为 X 的数学期望(discrete mathematical expectation),记作 $E(X)$ 或记作 $M(X)$。

设连续型随机变量 X 的密度函数为$f(x)$,当 Δx_i 取适当的小,(x_i,x_{i+1}) 上的近似概率 $f(x_i)\Delta x_i$ 类似离散随机变量中的p_i,而无限累加后得的离散随机变量的数学期望

$$\sum x_if(x_i)\Delta x_i$$

是积分$\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$ 的渐近和式。

【定义 17】 设 X 为连续随机变量,概率密度函数为 $f(x)$, 如果积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$$

存在,则把这个积分值称为 X 的数学期望(continuous mathematical expectation),记为 $E(X)$ 或记为 $M(X)$。

二、 五个常用分布的数学期望

1.二点分布的 $E(X)$

因为二点分布的概率分布为

x_i	1	0
p_i	p	$1-p$

故由数学期望定义知　$E(X) = 1 \times p + 0(1-p) = p$

2.二项分布的 $E(X)$

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^{n} kp_n(k) = \sum_{k=0}^{n} k \cdot C_n^k p^k q^{n-k} \\ &= \sum_{k-1}^{n} k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{np(n-1)!}{(k-1)![(n-1)-(k-1)]!} p^{k-1} q^{[(n-1)-(k-1)]} \\ &\xlongequal{\text{令} l=k-1} np \sum_{l=0}^{n} \frac{(n-1)!}{l![(n-1)-l]!} p^l q^{(n-1)-l} \\ &= np(p+q)^{n-1} = np \end{aligned}$$

3.泊松分布的 $E(X)$

设离散随机变量 $X \sim P(\lambda)$,则

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^{\infty} kp\{X=k\} = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} \mathrm{e}^{-\lambda} \\ &= \lambda \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda} \mathrm{e}^{\lambda} = \lambda \end{aligned}$$

4.均匀分布的 $E(X)$

由均匀分布密度函数定义有

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_{-\infty}^{a} x \cdot 0\mathrm{d}x + \int_a^b \frac{x}{b-a}\mathrm{d}x + \int_b^{+\infty} x \cdot 0\mathrm{d}x \\ &= \int_a^b x \frac{1}{b-a}\mathrm{d}x = \frac{1}{b-a} \frac{x^2}{2}\Big|_a^b \\ &= \frac{b+a}{2} \end{aligned}$$

5.正态分布的 $E(X)$

由正态分布的密度函数定义有

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}x\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x$$

$$\xlongequal{令\frac{(x-\mu)}{\sigma}=t}\int_{-\infty}^{+\infty}(\mu+\sigma t)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$$

$$=\mu\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t+\sigma\int_{-\infty}^{+\infty}t\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$$

$$=\mu\cdot 1+0=\mu$$

三、 数学期望的性质

设 X、Y 分别是随机变量，a、b、c 均是常数，由数学期望定义容易得出下列数学期望性质：

1° $E(c)=c$

2° $E(aX)=aE(X)$

3° $E(X+b)=E(X)+b$

4° $E(X\pm Y)=E(X)\pm E(Y)$

5°若 X 与 Y 相互独立，则 $E(XY)=E(X)\cdot E(Y)$

这些性质都可以推广到多个随机变量的情形。

例 29 某种病毒性传染病可通过验血检查。某大单位为职工进行普查，共有 1000 人需要验血。假设一般人群中该病的阳性者比例为 $p=0.1$。医务人员把4个职工分为一组，把 4 人的血液混合检查，如果混合血样是阴性的，这样，4 个人平均每人化验$\frac{1}{4}$ 次；如果混合血样是阳性的，则对 4 个人再逐个分别化验，这样 4 个人共作 5 次化验，相当平均每人化验 $1+\frac{1}{4}$ 次。假定不同人之间的反应相互独立的，这种分组化验比以往每人化验 1 次可减少多少工作量？

解： 因为 4 个人混合成的血呈阴性反应的概率为 $(1-p)^4$；呈阳性反应的概率为 $1-(1-p)^4$。设平均每人化验次数为随机变量 X，则分布列为：

X	$1/4$	$1+1/4$
p_i	0.9^4	$1-0.9^4$

其数学期望

$$E(X)=\frac{1}{4}\cdot 0.9^4+(1+\frac{1}{4})(1-0.9^4)$$

$$=1-0.9^4+\frac{1}{4}$$

抽血化验 1000 人平均化验次数为

$$1000\times(1-0.9^4+\frac{1}{4})\approx 594(次)$$

相当减少以往的工作量 40% 以上。

数学期望在工程和医学应用评价中，如果从效益越好的角度看，数学期望越大的那个

越好;如果从成本越低的角度上看,数学期望越小的那个越好。类似应用就不一一列举了。

7.4.2 随机变量的方差及其性质

一、方差的概念

在许多实际问题中,除了考虑随机变量的数学期望外,还要研究随机变量以 $E(X)$ 为中心的分散程度,比如生物体内的脉搏、血压及血球波动过大,表明该生物体处于病态。为了刻划随机变量 X 与数学期望的这种分散程度,通常用 $[X-E(X)]^2$ 来表示,在平均趋势考虑这个问题,则 $E[X-E(X)]^2$ 能描述随机变量 X 的分散程度,即随机变量的方差。

【定义 18】 设随机变量 X 的 $E(X)$ 存在,若期望 $E[X-E(X)]^2$ 存在,则把它称为 X 的方差(variance),记为 $D(X)$ 或记为 $V(X)$。

这个定义对离散型和连续型随机变量都是统一的,但具体表达形式不同。对离散型

$$D(X)=\sum[x_i-E(X)]^2 p_i$$

而对连续型

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}[X-E(X)]^2 f(x)\mathrm{d}x$$

对离散型和连续型随机变量计算方差还有下述公式:

$$\begin{aligned} D(X) &= E[X-E(X)]^2 \\ &= E(X^2-2XE(X)+E^2(X)) \\ &= E(X^2)-2E(X)\cdot E(X)+E^2(X) \\ &= E(X^2)-[E(X)]^2 \end{aligned}$$

即 $D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$

二、方差的性质

1° $D(c)=0$,即常数 c 的方差为 0;

2° $D(cX)=c^2D(X)$;

3° $D(X+b)=D(X)$;

4° 若 X、Y 相互独立,则 $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$。

证:(只证性质 4°)

$$\begin{aligned} D(X+Y) &= E[(X+Y)-E(X+Y)]^2 \\ &= E[(X-E(X))+(Y-E(Y))]^2 \\ &= E(X-E(X))^2+E(Y-E(Y))^2+2E[(X-E(X))(Y-E(Y))] \end{aligned}$$

由于 X、Y 相互独立,所以 $(X-E(X))$ 与 $(Y-E(Y))$ 也相互独立,由数学期望性质 5° 有

$$\begin{aligned} & E[(X-E(X))(Y-E(Y))] \\ &= E[X-E(X)]E[Y-E(Y)] \\ &= (E(X)-E(X))(E(Y)-E(Y)) \\ &= 0\times 0=0 \end{aligned}$$

故 $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$。

方差的这些性质对多个随机变量的情形仍成立。

三　五个常用分布的方差

1.二点分布的方差

由二点分布列可知随机变量 X^2 也服从二点分布,所以 $E(X^2) = 1^2 \cdot p + 0^2 \cdot q = p$,而 $E(X) = p$,因此

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = p - p^2 = pq$$

2.二项分布的方差

若在一次试验中定义随机变量 ξ_i,

$$\xi_i = \begin{cases} 1, & \text{当} A \text{发生} \\ 0, & \text{当} \bar{A} \text{发生} \end{cases}$$

再以 X 记 n 次试验中 A 出现的次数,则 X 是诸 $\xi_i (i = 1,2,\cdots,n)$ 之和:

$$X = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n$$

由于是独立重复试验,诸 ξ_i 两两相互独立。由方差性质 4° 和 $D(\xi_i) = pq$(见二点分布的方差),故

$$\begin{aligned} D(X) &= D(\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_i) \\ &= D(\xi_1) + D(\xi_2) + \cdots + D(\xi_n) \\ &= npq \end{aligned}$$

所以,二项分布 $B(n,p)$ 的方差 npq。这里顺便指出,$n = 1$ 时,二项分布就是二点分布。

3.泊松分布的方差

泊松分布的方差恰为泊松分布的数学期望λ。证明略。

4.均匀分布的方差

已知均匀分布的 $E(X) = \frac{1}{2}(a + b)$,又因

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a}\mathrm{d}x \\ &= \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} = \frac{b^2 + ab + a^2}{3} \end{aligned}$$

所以

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{b^2 + ab + a^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{2^2} = \frac{1}{12}(b-a)^2$$

5.正态分布的方差

由于 $E(X) = \mu$,故

$$\begin{aligned} D(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 f(x)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2 \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x \xrightarrow{\text{令}\frac{x-\mu}{\sigma}=t} \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t \\ &= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\left(-t\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t\right) = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}(0 + \sqrt{2\pi}) = \sigma^2 \end{aligned}$$

即　$D(X) = \sigma^2$。

例 30 在同样的条件下,用两种方法测定某一容器内细菌个数(单位:万)为随机变量,分别用 X_1、X_2 表示,由大量测定结果得到分布列如下表,试比较两种方法的精度?

细菌个数	48	49	50	51	52
方法 1 概率	0.1	0.1	0.6	0.1	0.1
方法 2 概率	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2

解: 容易计算出 $E(X_1) = E(X_2) = 50$,为了比较两种方法的精度,还得 考虑方差小的,方差越小,所得试验结果越集中数学期望的附近。因此计算它们的方差:

$$D(X_1) = (48-50)^2 \times 0.1 + (49-50)^2 \times 0.1 + (50-50)^2 \times 0.6 + (51-50)^2 \times 0.1 + (52-50)^2 \times 0.1 = 1$$

$$D(X_2) = (48-50)^2 \times 0.2 + (49-50)^2 \times 0.2 + (50-50)^2 \times 0.2 + (51-50)^2 \times 0.2 + (52-50)^2 \times 0.2 = 2$$

显然 $D(X_1) < D(X_2)$,故方法 1 精度好于方法 2。

将上述的五种常用分布及它们的数学期望和方差归纳总结成表 7-8。

表 7-8 随机变量的分布、期望和方差

分布名称	概率分布或密度函数	数学期望	方差
二点分布	$P\{X=1\} = p, P\{X=0\} = 1-p$ $0 < p < 1$	p	$p(1-p)$
二项分布 $B(n,p)$	$P\{X=K\} = C_n^K p^K (1-p)^{n-K}$ $0 < p < 1, K = 0,1,2,\cdots,n$	np	$np(1-p)$
泊松分布 $P(\lambda)$	$P(\lambda) = \frac{\lambda^K}{K!} e^{-\lambda}$ $\lambda > 0, K = 0,1,2,\cdots$	λ	λ
均匀分布	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leqslant x \leqslant b \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(X-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ $-\infty < x < +\infty$	μ	σ^2

四、标准差及变异系数

随机变量都带有量纲或单位。方差 $D(X)$ 的量纲是期望 $E(X)$ 的平方,应用不方便,所以常采用方差的算术平方根,即用 $\sqrt{D(X)}$ 来刻划随机变量 X 对期望 $E(X)$ 的分散程度。

【定义 19】 设随机变量 X 的方差为 $D(X)$,则称 $\sqrt{D(X)}$ 为 X 的标准差(standard deviation),记作 $\sigma(X)$,即 $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$。

标准差与期望的量纲或单位是一致的。但是，有时要对具有不同量纲的随机变量的分散程度进行比较，所以类似误差理论中把绝对误差与近似值之比称为相对误差一样，使其无量纲，还能描述随机变量的分散程度。

【定义 20】 设随机变量 X 的数学期望为$E(X)$，标准差为$\sqrt{D(X)}$，则称$\frac{\sqrt{D(X)}}{E(X)}$为变异系数(coefficient of variation)，记为 $CV(X)$，即 $CV(X) = \sqrt{D(X)}/E(X)$。也可用百分数表示。

例 31 某地20 岁男子，其身高均数(数学期望)为 166.06cm，标准差为 4.95cm；其体重均数为 53.72kg，标准差为 4.96kg。试问该地区 20 岁男青年身高与体重的变异程度是否可认为相同？

解： 设该地 20 岁男子身高和体重都是随机变量，分别用 X_1、X_2 表示。

$$CV(X_1) = \frac{4.95}{166.06} \times 100\% = 2.98\%$$

$$CV(X_2) = \frac{4.96}{53.72} \times 100\% = 9.23\%$$

由此可见，该地 20 岁男子体重的变异度大于身高的变异度，或者说身高比体重均匀。

7.5* 大数定律和中心极限定理简介

7.5.1 大数定律

概率论中用来阐明大量随机现象平均结果的稳定性的一系列定理统称为大数定律(law of large numbers)。它是概率论和数理统计最基本最重要的核心定理。我们不加证明地把大数定律叙述如下：

【定理 7】 (伯努利大数定理)设 m 是n 次独立重复试验中事件A 发生的次数，p 是事件A 在每次 试验中发生的概率，则对任意 $\varepsilon>0$，有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = 1$$

【定理 8】 (切贝雪夫大数定理)设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立且服从同一分布，并且具有相同的有限数学期望 μ 和方差 σ^2，作 n 个随机变量的算术平均数 $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$，则对任意 $\varepsilon > 0$，有

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\bar{X} - \mu| < \varepsilon\} = 1$$

通过大量随机现象，我们不仅看到随机事件的频率具有稳定性，而且看到一般平均结果也具有稳定性。也就是说大量随机现象平均结果实际上与每个个别随机现象的个别特征毫无关系。伯努利大数定律指出，n 充分大，通过试验确定某事件发生的频率可作为该事件的相应概率的估计。切贝雪夫大数定律指出，n 充分大，经过算术平均以后得到的随机变量可作为数学期望的估计。

7.5.2 中心极限定理

中心极限定理(central limit theorem)有很多个，它们的差别仅是条件不完全相同，但

结论一致。概率论中有关论证随机变量的和的极限分布是正态分布的那些定理通常叫做中心极限定理。它们在理论和应用上起到核心作用。下面,我们不加证明地叙述一个中心极限定理。

【定理 9】设 $X_1,X_2,\cdots,X,\cdots$ 是一列独立同分布的随机变量,则当 $n\to\infty$ 时,对任意 x 都有

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}(X_k-\mu)\leqslant x\right\}=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

其中 $\mu=E(X_k),\sigma=\sqrt{D(X_k)}>0,k=1,2,\cdots$。

这个定理指出,n 充分大,随机变量$\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}(X_k-\mu)$,即$(\sum_{k=1}^{n}X_k-\mu n)/\sqrt{nD(X_k)}$就近似服从标准正态分布 $N(0,1^2)$,从而$\sum_{k=1}^{n}X_k$ 近似服从正态分布。也可解释为:若被研究的随机变量可以表示为大量独立随机变量的和,其中每一个随机变量对于总和只起微小的作用,则可以认为这个随机变量实际上是服从正态分布的。生物医学中很多随机变量均服从正态分布就是这个原因。

小　结

概率论以随机现象为研究对象,通过表面上的偶然性的观察和分析,揭示支配随机现象的内在的隐蔽着的数量规律。

掌握对随机现象逻辑分析的思维方法。比如,先从频率直方图实际研究出发,然后上升到理论高度,密度函数曲线下的面积就是概率,并立刻借助会求面积的定积分工具,揭示随机现象的理论,又把理论推广和指导一般随机现象研究中去。这种归纳和演绎方法将对生物医学的实际工作和科研研究有指导意义。

大数定律和中心极限定理是概率论与数理统计联系的核心定理。它们不仅是理论研究的依据,而且对数理统计和多变量分析在实际上的应用起到重要的作用。知道这些定理的意义,会更加深刻掌握概率论的基础知识。

本章定义、定理及性质是概率的基本理论,概率中的基本运算法则、公式和例题将给出处理随机现象的数学方法,在本章的某些习题里也说明概率论在医学方面的一些应用。

习　题

1. 设 A、B、C 表示三个不同的随机事件,将下列事件用 A、B、C 的运算表示出来。(1)A 与B 均发生而C 不发生;(2)至少一个事件发生;(3)恰有一个事件发生;(4)不多于一个事件发生。

2. 测量一个收缩压可以分成三个简单事件,$A=\{$收缩压不高于16kPa(120 mm Hg)$\}$,$B=\{$收缩压介于16kPa(120 mm Hg)到20kPa(150 mm Hg)之间$\}$,$C=\{$收缩压不低于20kPa(150 mm Hg)$\}$,试问:

(1)这些事件是否互不相容?(2)$\bar{A}$ 是什么事件?(3)AC 是什么事件?

3. 设 A、B、C 是三个不同的事件，试指出下列等式的涵义。

(1)$ABC = A$;(2)$A + B + C = A$;(3)$A - B = A$;(4)$\overline{A} + B = B$。

4. 若事件 A 与 B 互不相容，试问事件 A 与 B 是否对立?反之如何?

5. 细菌在培养基里繁殖起来后，形成一些菌丛。把培养基分成 20 格，每格中出现的菌丛个数如下：

格子中菌落数:0　1　2　3　4　5　6　7

这样的格子数:3　6　5　4　1　0　1　0

以此为依据，格中菌丛数分别为 0,1,2,3,4,5,6,7 的频率是多少?

6. 在 10 个病理切片中，有 3 个确诊为肝癌，现在随机抽取 4 个，试问：

(1) 恰有 2 个是确诊患肝癌的概率?(2)4 个全是正常的概率。

7. 一批零件共 100 个，次品率为 10%，每次从中任取一个零件。(1) 取出后不放回；(2) 取出后又放回；分别求第 2 次才取得正品的概率。

8. 考试时，有 10 份编号为 1,2,…,10 的试卷供 20 名学生依次抽签选答。因为学生人数多于试卷份数，抽到的考签都立刻放回，然后下位同学接着抽签。试求下列事件的概率：

(1) 事件 A 是 1 号签被抽到过 3 次；(2) 事件 B 是 1 号签第 3 次被抽到发生在第 15 次抽签时。

9. 若某个人群中患结核病的概率为 0.003，患沙眼的概率为 0.004，现从该人群中任意抽查一人，(1) 此人既患结核病又患沙眼病的概率为多少?(2) 此人既不患结核病又不患沙眼病的概率是多少?

10. 排列这些概率：$P(A)$,$P(AB)$,$P(A + B)$,$P(A) + P(B)$ 的大小次序。

11. 假设有甲、乙两批种子，发芽率分别为 0.8 及 0.7，在两批种子中各随机抽取一粒，试求：

(1) 两粒种子都能发芽的概率；(2) 至少有一粒能发芽的概率；(3) 恰好有一粒种子发芽的概率。

12. 假设给蛙每单位体重注射一定剂量的洋地黄，致死的概率为 0.4，现有人给 10 只蛙注射该剂量的洋地黄，求死亡数不多于 3 只的概率。

13. 假设某种眼疾病第一次致盲的概率为 0.4，如果初患未致盲，第二次重患致盲的概率是 0.8，某人患两次该眼病，问致盲的概率是多少?

14. 盒中放有 12 个乒乓球，其中 9 个是新的，第一次比赛时，从中任取 3 个来用，用后仍放回盒中；第二次比赛时，再从盒中任取 3 个，求第二次取出的乒乓球都是新乒乓球的概率。

15. 设某地区有甲、乙、丙三种慢性病，该地区老年人中有 20% 患甲病，16% 患乙病，14% 患丙病，其中有 8% 兼患甲和乙病，5% 兼患甲和丙病，4% 兼患乙和丙病，又有 2% 兼患甲、乙、丙三种病，问老年人中有百分之几至少患有一种疾病。

16. 某地区居民的血型分布为：$P\{\text{A型}\} = 14.5\%$，$P\{\text{O型}\} = 50\%$，$P\{\text{B型}\} = 31.2\%$，$P\{\text{AB 型}\} = 4.3\%$，今有一 A 型血型病人需要输血，试问当地居民可给他输血的概率。

17. 某医院采用 Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ,Ⅳ n 种方法医治某种癌症，在该癌症患者中采用 4 种方案的百分比分别为 0.1,0.2,0.25,0.45，其有效率分别为 0.97,0.95,0.94,0.9。试求：

(1) 到该院接受治疗的患者,治疗有效的概率为多少?(2) 如果一患者经治疗而收效,最有可能接受了哪种方案的治疗?

18.假定用血清甲胎蛋白法诊断肝癌,用 C 表示被检验者患有肝癌这一件事,A 表示被检验者诊断为患有肝癌这一件事,又设在人群中 $P(C)=0.0004$,$P(A/C)=0.95$,$P(A/\bar{C})=0.10$,现在若有一人被此检验法诊断为患有肝癌,求此人真正患有肝癌的概率 $P(C/A)$。

19.证明,若 $P(A/B)=P(A/\bar{B})$,则事件 A 与事件 B 是独立的。

20.A、B 是任意二事件,证明 $P(A\bar{B})=P(A)-P(AB)$

21.设 A、B 二射手,A 命中目标率 0.8,B 命中目标率为 0.9,求两射手同时向同一目标射击,此目标被击中的概率是多少?

22.据以往资料分析,小白鼠感染某病的概率为 0.3,现对 20 只健康的小白鼠注射一种新的血清,假设实验的结果最多有 2 只小白鼠受感染,试问这种血清是否有一定的预防效果?

23.一批零件的次品率为 10%,从中任取 4 个零件,出现的次品数为离散型随机变量 X,它服从二项分布,试求概率分布,分布函数,并画出分布函数图形。

24.把一个面积为 10cm^2 的培养皿置于面积为 10m^2 的某病室中,1 小时后取出,培养 24 小时,查得 5 个菌落。假若这 10m^2 上共有细菌 1000 个均匀地分布在地面上,那么在这个培养皿里发现 5 个细菌的概率有多大?发现 5 个以上的概率有多大?

25.若通寸钡餐透视诊断消化性溃疡,对真正有溃疡而又能作出正确诊断的占 82%,诊断为溃疡而实际上没有溃疡的占 2%。设某地区溃疡发病率是 0.03,某人经钡餐透视后认为有溃疡,求他真正有溃疡的概率是多少。

26.已知某种疾病的发病率为 0.001,某单位共 5000 人,问该单位有这种疾病的人数超过 5 人的概率为多大?

27.某一路公共汽车,严格按时间表运行,其中某一站汽车每隔 5 分钟来一趟。试求乘客在车站等候时间小于 3 分钟的概率。

28.设连续随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{A}{\sqrt{1-x^2}}, & \text{当}|x|<1\\ 0 & \text{当}|x|\geqslant 1\end{cases}$$

试求:

(1)系数 A;(2) $P\{-\frac{1}{2}<X<\frac{1}{2}\}=?$;(3)随机变量 X 的分布函数。

29.设连续型随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{当 } x<0\\ CX^2, & \text{当 } 0\leqslant x<1\\ 1, & \text{当 } x\geqslant 1\end{cases}$$

试求:

(1)系数 C;(2)X 落在区间(0.3,0.7)内的概率;(3)X 的密度函数。

30. 测量一个目标的距离,测量误差服从 $N(0,2^2)$,现测量三次,其中至少一次误差

没有超过 2 的概率是多少?

31. 正常人每毫升血液中白细胞数 X 服从正态分布 $N(7300,700^2)$,现抽检 5 名正常人,求:

(1)5 人白细胞数都在(5000,9000)之间的概率?(2)有 1 人白细胞数在 4000 以下的概率。

32. 调查资料表明,某市 12 岁男孩身高 X 服从正态分布 $N(143.1,5.97^2)$,单位厘米,求该市 12 岁男孩身高的 95% 正常值范围。

33. 美国的智商测试(Wecheler 成人智力标准)分年龄组设计进行的。在 20 ~ 34 岁组,得分设计为服从 $N(110,5^2)$,在 60 ~ 64 岁组,得分设计服从 $N(90,5^2)$。试说明:

(1)30 岁的某女性参加测试得分 135 分,她的得分是否比平均值高出一个标准差?(2)该女性的母亲 60 岁,也参加测试得分 120 分。她们母女俩谁的成绩更好?

34. 设随机变量 X 的分布列

x_k	-1	0	$1/2$	1	2
p_k	$1/3$	$1/6$	$1/6$	$1/12$	$1/4$

试求:(1)$E(X)$,(2)$E(-X-1)$,(3)$E(X^2)$。

35. 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}2(1-x), & \text{当 } 0<x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

试求 $E(X)$ 和 $D(X)$。

36. 设随机变量 X 的分布函数为

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{当 } x<-2\\ \dfrac{x}{4}+\dfrac{1}{2}, & \text{当 } -2<x\leqslant 2\\ 1, & \text{当 } 2<x\end{cases}$$

试求 X 的密度函数,数学期望及方差。

37. 某医院总结随访的 374 例患某种恶性肿瘤病人手术后生存情况。据分析,病人 5 年生存率 p 近似服从 $N(0.3,0.024^2)$,试求

(1)5 年生存率 $p>0.34$ 的概率有多大?(2)若 $p=0.35$,374 例病人中,预期有多少人术后活到 5 年以上。

38. 某厂生产的大输液有 20% 是澄明度不良品,今从其中随机抽取 5 瓶,设所得澄明度不良品的瓶数是随机变量 X,求 X 的概率分布、方差、标准差以及变异系数。

39. 在自动控制系统等实际问题中,常用数学期望都是 0,方差都是 σ^2 的相互独立随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 来代表随机干扰或噪声,设 $X=\dfrac{1}{n}(X_1+X_2+\cdots+X_n)$,试计算 $E(X)$ 和 $D(X)$。

40. 设随机变量 X 的密度函数是

$$f(x)=A\mathrm{e}^{|x|},(-\infty<x<+\infty)$$

试求:

(1) 常数 A;(2)$P\{0<X<1\}$;(3)$E(X)$ 和 $D(X)$;(4)$E(\frac{X+1}{2})$,$D(\frac{X+3}{2})$。

41. 调查某地健康妇女，获得红细胞的数学期望为 4.17($\times 10^{12}/L$)，标准差为 0.291 ($\times 10^{12}/L$)；血红蛋白的数学期望为 117.6g/L，标准差为 10.2g/L。试求该地健康妇女的红细数 X 和血红蛋白 Y 的变异系数中，哪个较大？

（马建忠）

第八章　线性代数初步

线性代数主要是研究矩阵和向量间的线性关系的一个数学分支。它在工业、农业、科学技术领域中有着重要应用，特别是计算机技术的发展和普及，更加促进了线性代数的广泛应用和发展。线性代数对以后学习生物医学统计，多变量分析、模糊数学、生物数学是不可缺少的基础知识。

本章主要介绍 n 阶行列式、矩阵、线性方程组。它们既是线性代数的主要基础知识，又是在各个领域中应用的必备工具。

8.1　行列式

8.1.1　行列式的概念和计算

行列式是解线性方程组的有力工具，我们先从求解二元线性方程组着手，引进二阶行列式，然后把二阶行列式推广到 n 阶行列式上。

例如求解二元方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{8-1}$$

可用消去法解得

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \quad ; \qquad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \tag{8-2}$$

为了用另一种形式求解二元线性方程组，我们引进记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}; \qquad \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - a_{12}b_2$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - b_1a_{21} \tag{8-3}$$

它们都称为二阶行列式，它们含有两行、两列，横写的叫行，竖写的叫列。从上式可知，二阶行列式是这样两个项的代数和，一个是从左上角到右下角的对角线上两个元素的乘积，取正号；另一个是从右上角到左下角的对角线上两个元素的乘积，取负号。如果将式(8-3)中的三个二阶行列式分别记为 D、D_1、D_2，并且当 D 的结果不为零时，二元线性方程组(8-1)式可用二阶行列式得到同样的消去法的解，即

$$x_1 = \frac{D_1}{D} \quad , \qquad x_2 = \frac{D_2}{D}$$

我们将 D 进一步表示成

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (-1)^{k(1,2)}a_{11}a_{22} + (-1)^{k(2,1)}a_{12}a_{21}$$

即二阶行列式表示的是一个数,其值由2! 项代数和构成,每一项都取自不同行不同列的两个元素之积,再乘以$(-1)^{k(j_1,j_2)}$,$k(j_1,j_2)$称为逆序数(即各因子的第一个下标按自然顺序排列后,第二个下标出现多少次下标数小的反而在下标数大的后面)。这里 $a_{11}a_{22}$的逆序数 $k(1,2)=0$,$a_{12}a_{21}$的逆序数 $K(2,1)=1$

【定义1】 n 阶行列式(n - order determinant)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1j_2\cdots j_n)} (-1)^{k(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

是由 n^2 个数 a_{ij}($i=1,2,3,\ldots,nj\ ;=1,2,3,\ldots,n$)通过上式所确定的一个数,其中,"$\sum\limits_{(j_1j_2\cdots j_n)}$"表示对所有 n 元排列求和,共有 n! 个项求和,和式中每一项都是由取自行列式中所有既不同行又不同列的 n 个元素的乘积再乘以$(-1)^{k(j_1j_2\cdots j_n)}$,其中$k(j_1j_2\cdots j_n)$为 n 个元素的第一个下标按序数的自然顺序排列后,其第二个下标排列的逆序数。a_{ij}称为行列式的元素,n 为行列式的阶。

按行列式定义,三阶行列式中既不同行又不同列的3个元素的乘积共有6项,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \qquad (8\text{-}4)$$

$k(j_1j_2j_3)$按式(8-4)先后顺序,各项的逆序数分别是0,2,2,1,1,3,所以前三项取正号,后三项取负号。对于式(8-4)的三阶行列式可按十字交叉的方法加强记忆。即在三阶行列式中,实线上的三个元素的乘积构成的三项都取正号,虚线上的三个元素的乘积构成的三项都取负号。具体形式如图8-1所示,其计算结果与(8-4)式相同。例如,

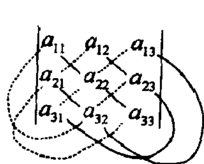


图8-1

$$D = \begin{vmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 7 \\ 3 & -2 & -8 \end{vmatrix} = 0+63+0-14-0-0=49$$

由行列式定义我们知道,一阶行列式$|a_{11}|$是一个数 a_{11},不是 a_{11} 的绝对值;二、三阶行列式可按十字交叉法计算结果。但四阶以上的行列式定义计算就很麻烦。为了使四阶以上行列式计算简单化,我们引进余子式和代数余子式的概念。

在 n 阶行列式中,把元素 a_{ij}所在的第i 行和第j 列划去后。剩下来的 $n-1$ 阶行列式叫做元素 a_{ij}的余子式(complement minor),记作 M_{ij};而 M_{ij}前面附以符号$(-1)^{i+j}$后,叫做元素 a_{ij}的代数余子式(algebraic complement),用符号 A_{ij}来表示,即

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$$

例如四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

中元素 a_{23}的余子式和代数余子式分别为

$$M_{23}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=-M_{23}$$

有了代数余子式的概念,可以把高阶行列式化为一些较低阶的行列式来计算行列式的值。

【定理 1】 n 阶行列式等于它的任一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和,即

$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\ldots\ldots+a_{in}A_{in}$ (按第 i 行展开)

($D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}$,这是按第 j 列展开的)。

这个定理亦称为行列式按行(列)展开法则。定理证明略。

在运用定理 1 计算行列式时,我们总是按含 0 最多的行或列来展开行列式,因为 0 位置的代数余子式乘以 0 后仍然是 0。

例 1 计算

$$D=\begin{vmatrix} 7 & 1 & -1 & 1 \\ -13 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & -5 & 3 & 0 \end{vmatrix}\text{的值。}$$

解: 由定理 1 将行列式 D 按第三行展开,因为除 $a_{33}=1$ 外,其余的 a_{31},a_{32},a_{34}均为 0,D 展开后得

$$D=0+0+1\cdot(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 7 & 1 & 1 \\ -13 & 1 & -1 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 7 & 1 & 1 \\ -13 & 1 & -1 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-5)(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}+(-5)(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ -13 & -1 \end{vmatrix}+0$$

$$=(-5)\cdot(1)\cdot(-2)+(-5)\cdot(-1)\cdot(6)=10+30=40$$

例 2 **证明**

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}$$

证: 由定理 1 将行列式按第一行展开有

$$D=a_{11}\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

对上式中的行列式,仍按第一行展开有

$$D=a_{11}\cdot a_{22}\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{33} & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{43} & a_{44} & \cdots & 0 \\ a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

这样逐步推下去,则得到

$$D=a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}\cdots a_{nn}$$

利用行列式展开计算行列式,也就是把一个高阶行列式转化为一些较低阶的行列式计算,实质就是用降阶法来计算行列式的值。

8.1.2 行列式的性质与计算

一、行列式的性质

如果把 n 阶行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 的行依次变为列,就得到一个新行列式

$$D'=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$ 则 D' 叫做 D 的转置行列式。

性质 1 n 阶行列式的值等于它的转值行列式的值。

性质 1 说明在行列式中,行与列的地位是对等的,因此行列式凡是对行成立的性质,对列也同样成立。

性质 2 互换行列式的两行(列),则行列式变号。

性质 3 若行列式中有两行(列)元素对应相同,则行列式的值为零。

事实上,将行列式 D 中相同两行(列)元素对换,行列式本身并未改变,但其值由性质 2 知道 $D=-D$,由此得出 $D=0$。

性质 4 把行列式某行(列)的所有元素乘上某数 $k(\neq 0)$,等于 k 乘行列式,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 5 若行列式的某行(列)的各元素是两项之和,则此行列式等于两个行列式之

和,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{il} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 6 若行列式中有两行(列)元素对应成比例,则行列式等于零。

证: 设行列式的第 i 行(列)的各元素为第 j 行(列)对应元素的 k 倍,由性质 4 可把 k 提到行列式符号的前面,这时行列式第 i,j 两行(列)已经相同,再由性质 3 可知行列式等于零。

性质 7 将行列式的某一行(列)乘上一个常数 k 后加到另一行(列)上去,行列式的值不变。

证: 不妨设行列式第 j 行 k 倍加到第 i 行上去,由行列式性质 5 和性质 6,有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 8 若行列式中有一行(列)元素全是零,则行列式等于零。

二、 行列式的计算

利用行列式的性质和行列式展开定理可简化行列式的计算。读者可通过例题掌握运算规律和特点。

例 3 计算

$$D=\begin{vmatrix}1&0&1&3\\1&-1&4&2\\-1&-1&2&3\\3&3&1&1\end{vmatrix}\text{的值。}$$

解： 将行列式第1行分别乘(−1)和1及(−3)，分别加到第2行、第3行、第4行上，得到

$$D=\begin{vmatrix}1&0&1&3\\0&-1&3&-1\\0&-1&3&6\\0&3&-2&8\end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}-1&3&-1\\-1&3&6\\3&-2&-8\end{vmatrix}$$

再把第1行乘以(−1)后加到第2行，再按第2行展开得

$$D=\begin{vmatrix}-1&3&-1\\0&0&7\\3&-2&-8\end{vmatrix}=7\times(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}-1&3\\3&-2\end{vmatrix}=49$$

我们把 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&\cdots&a_{1n}\\0&a_{22}&a_{23}&\cdots&a_{2n}\\0&0&a_{33}&\cdots&a_{3n}\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

称为上三角形行列式，形如例2的行列式称为下三角形行列式，它们统称为三角形行列式。显然，n 阶三角形行列式等于它主对角线上元素的乘积。

$$a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$$

对任意的 n 阶行列式可以应用性质将其化为三角形行列式，则 n 阶行列式的值即为主对角线上的元素相乘的积。

例4 计算

$$D=\begin{vmatrix}-2&5&-1&3\\1&-9&13&7\\3&-1&5&-5\\2&8&-7&-10\end{vmatrix}\text{的值。}$$

解： 互换1,2两行，第1行再分别乘2,(−3),(−2)后分别加到第2,3,4行。

$$D=-\begin{vmatrix}1&-9&13&7\\-2&5&-1&3\\3&-1&5&-5\\2&8&-7&-10\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&-9&13&7\\0&-13&25&17\\0&26&-34&-26\\0&26&-33&-24\end{vmatrix}$$

将第2行分别乘2后加到第3、4行；以后计算类似。利用计算上三角形行列式结果有

$$D=-\begin{vmatrix}1 & -9 & 13 & 7\\0 & -13 & 25 & 17\\0 & 0 & 16 & 8\\0 & 0 & 17 & 10\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1 & -9 & 13 & 7\\0 & -13 & 25 & 17\\0 & 0 & 16 & 8\\0 & 0 & 0 & \frac{3}{2}\end{vmatrix}$$

$$=(-1)\cdot(-13)\cdot 16\cdot\left(\frac{3}{2}\right)=312$$

利用计算机计算行列式的值时,可参照例 4 的方法编程计算。

8.2 矩　　阵

8.2.1 矩阵的概念

在研究一些变量与另一些变量之间的相互关系时可利用一种矩形数表。如,对某中学学生身高体重的测量,得到如下一份统计表:

人数 体重/kg 身高/m	40	50	60	70	80
1.4	20	16	4	2	0
1.5	80	100	80	20	10
1.6	30	120	150	120	30
1.7	15	30	120	150	120
1.8	0	1	2	8	10

反映身高与体重这种关系时也可将上面表格写成一个简化了的 5 行 5 列的矩形数表

$$\begin{bmatrix}20 & 16 & 4 & 2 & 0\\80 & 100 & 80 & 20 & 10\\30 & 120 & 150 & 120 & 30\\15 & 30 & 120 & 150 & 120\\0 & 1 & 2 & 8 & 10\end{bmatrix}$$

如果只反映 1.5 米与体重的关系,则可表示为 1 行 5 列的数表

$$\begin{bmatrix}80 & 100 & 80 & 20 & 10\end{bmatrix}$$

如果只反映 60kg 与身高的关系,可表示 5 行 1 列的数表

$$\begin{bmatrix}4\\80\\150\\120\\2\end{bmatrix}$$

【定义 2】 由 $m\times n$ 个数排列成 m 行 n 列的数表

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

叫做 $m\times n$ 矩阵(matrix),这 $m\times n$ 个数叫做矩阵A 的元素,a_{ij}叫做矩阵A 的第i 行第j 列元素。元素是实数的矩阵叫实矩阵,我们主要讨论实矩阵,矩阵简记 $A=(a_{ij})_{m\times n}$。

当 $m=n$ 时,A 称为n 阶方阵。记为 $A=(a_{ij})_n$。

值得注意的是 n 阶方阵A 与n 阶行列式是不同的两个概念,n 阶方阵是一个由 $n\times n$ 个元素组成的方形表;而 n 阶行列式则表示按一定法则计算的一个数。

只有一行的矩阵 $A=[a_1,a_2\cdots,a_n]$称为行向量,或行矩阵(row matrix);只有一列的矩阵

$$A=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

称为列向量或列矩阵(column matrix)。

$m\times n$ 矩阵可以看成是由 m 个行向量组成,也可看作是由 n 个列向量组成。

如果 $A=(a_{ij})$与 $B=(b_{ij})$都是 $m\times n$ 矩阵,并且它们的对应元素相等,即

$$a_{ij}=b_{ij}(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$$

那么称矩阵 A 与矩阵B 相等,记作 $A=B$。

在 n 阶方阵中由左上角向右下角所引的对角线称为主对角线,$a_{ii}(i=1,2,\cdots,n)$称为方阵$(a_{ij})_n$ 的对角线元素。把对角线元素都是 1,其余元素都是 0 的 n 阶方阵称为 n 阶单位阵(unitary matrix),记为 I_n。如:

$$I_3=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\quad I_4=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

除对角线元素外,其余元素均为零的方阵称为对角矩阵(diagonal matrix)。如:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

形如

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

的方阵分别称为上三角形矩阵和下三角形矩阵。统称为阶梯形矩阵。

元素都是零的矩阵称为零矩阵(zero matrix),记为 $O_{m\times n}$

例 5 写出矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

的对角阵、阶梯矩阵。

解: A 的对角阵、阶梯矩阵分别为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

8.2.2 矩阵的运算

一、 矩阵的加法和数乘

【定义 3】 设有两个 $m\times n$ 矩阵 $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$,那么矩阵 A 与 B 之和记作 $A+B$,规定为

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

要注意两个矩阵的相加与行列式的相加有不同的规定,矩阵相加是两个矩阵的所有对应元素都得相加,而两个行列式的相加只是一行(或一列)对应元素相加。

【定义 4】 一个实数 $\lambda(\neq 0)$ 与矩阵 A_{mn} 的数乘记作 λA 或 $A\lambda$,规定为

$$\lambda A = A\lambda = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix}$$

注意可以把 $(-1)A$ 写成 $-A$。还应该注意矩阵的数乘与行列式的数乘规定是不同的,不同点在哪里留给读者考虑。

矩阵的加法与数乘满足以下 8 条性质:

(1) $A+B=B+A$　　(2) $(A+B)+C=A+(B+C)$

(3) $k(\lambda A)=k\lambda A$　　(4) $k(A+B)=kA+kB$

(5) $(k+\lambda)A=kA+\lambda A$　　(6) $O+A=A$

(7) $A+(-A)=O$　　(8) $1\cdot A=A$

其中 A、B、C、O 均是 $m\times n$ 矩阵，k、λ 均为非零实数。其性质根据矩阵加法与数乘定义可得到。

例 6　用上述的矩阵的线性运算法则

(1) 计算矩阵 $A=3\begin{bmatrix}-2 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

(2) 求满足下面方程的矩阵 X

$$3\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & 0 & 1\\ 4 & -5 & 2\end{bmatrix}+X=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ -1 & 0 & 3\\ 4 & 5 & -6\end{bmatrix}$$

解：(1) $A=3\begin{bmatrix}-2 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6 & 6\\ 3 & 3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & -2\\ 0 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-8 & 8\\ 3 & 1\end{bmatrix}$

(3) 矩阵 X 保持在等式左边，其余矩阵移到等式右边。

$$X=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ -1 & 0 & 3\\ 4 & 5 & -6\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & 0 & 1\\ 4 & -5 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ -1 & 0 & 3\\ 4 & 5 & -6\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3 & -6 & 9\\ 6 & 0 & 3\\ 12 & -15 & 6\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-3 & 7 & -7\\ -7 & 0 & 0\\ -8 & 20 & -12\end{bmatrix}$$

二、矩阵的乘法

我们把一个矩阵的某一行与另一个矩阵的某一列对应元素相乘的代数和规定为新矩阵的一个元素，如

$$\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\\ b_{31} & b_{32}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32}\\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32}\end{bmatrix}$$

对这种运算我们给出一般性的定义。

【定义 5】　设 $A=(a_{ij})$ 是一个 $m\times k$ 矩阵，$B=(b_{ij})$ 是一个 $k\times n$ 矩阵，则规定矩阵 A 与矩阵 B 的乘积是一个 $m\times n$ 矩阵 $C=(c_{ij})$，其中

$$c_{ij}=a_{i1}\cdot b_{1j}+a_{i2}\cdot b_{2j}+\cdots+a_{ik}b_{kj};(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$$

并把此乘积记为 $C_{mn}=A_{mk}B_{kn}$ 或 $C=AB$。

必须注意，只有当第一矩阵(左边矩阵)的列数等于第二矩阵(右边矩阵)的行数时，两个矩阵才能相乘。

例 7　设矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\ 2 & 1 & 0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}4 & 1\\ -1 & 1\\ 2 & 0\end{bmatrix}$$

求矩阵 AB 和 BA。

解：A 的列数等于 B 的行数，所以 A 与 B 可以相乘。

$$AB=\begin{bmatrix}1&0&3\\2&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&1\\-1&1\\2&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\times4+0\times(-1)+3\times2&1\times1+0\times1+3\times0\\2\times4+1\times(-1)+0\times2&2\times1+1\times1+0\times0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}10&1\\7&3\end{bmatrix}$$

同理

$$BA=\begin{bmatrix}4&1\\-1&1\\2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&3\\2&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&1&12\\1&1&-3\\2&0&6\end{bmatrix}$$

由例 11 可以知道，$AB\neq BA$，可见矩阵乘法不适合交换律，这与我们实数乘法是不同的。

另外矩阵也不适合消去律。比如说，

$$A=\begin{bmatrix}1&2&1&1\\0&2&2&4\\4&6&8&0\end{bmatrix},B_1=\begin{bmatrix}25\\10\\30\\0\end{bmatrix},B_2=\begin{bmatrix}40\\0\\30\\5\end{bmatrix}$$

可以得到

$$AB_1=AB_2=\begin{bmatrix}75\\80\\400\end{bmatrix}$$

但是，不能从 $AB_1=AB_2$ 中消去 A 得到 $B_1=B_2$，因为 B_1 显然不等于 B_2，即矩阵不适消去律。

例 8 设矩阵方程形式

$$\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{bmatrix}$$

记为 $AX=B$，其中 A、X、B 分别代表上面的三个矩阵。试叙述矩阵方程形式代表线性方程组(8-5)。

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\\vdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_n\end{cases}\tag{8-5}$$

解：由矩阵乘法

$$AX=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}=B$$

又由两个矩阵相等的定义便得到式(8-5)的线性方程组。

例 9 设有两个线性变换

$$\begin{cases} y_1=x_1+3x_2 \\ y=2x_1+x_3 \end{cases},\qquad \begin{cases} x_1=4z_1+z_2 \\ x_2=-z_1+z_2 \\ x_3=2z_1 \end{cases}$$

将 y_1、y_2 分别用 z_1、z_2 线性表示。

解： 仿例 8 将两个线性变换分别写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},\qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

由矩阵乘法

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 10 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

故得

$$\begin{cases} y_1=z_1+4z_2 \\ y_2=10z_1+z_2 \end{cases}$$

矩阵的乘法满足结合律和分配律：

(1) $(A_{mn}B_{ns})C_{st}=A_{mn}(B_{ns}C_{st})$

(2) $(kA)B=A(kB)=k(AB)$（k 为实数）

(3) $A(B+C)=AB+AC$

(4) $(A+B)C=AC+BC$

以上性质根据矩阵的乘法、加法、数乘定义可直接得到，请读者自行验证。

三、矩阵的转置

【定义 6】 把矩阵 A 的行依次换成列而得到的矩阵，叫做 A 的转置矩阵，记作 A' 或 A^{T}，即

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n},\quad 则\ A^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{n\times m}$$

转置矩阵满足如下的规律：

(1) $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=A$　　(2) $(A+B)^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}+B^{\mathrm{T}}$

(3) $(kA)^{\mathrm{T}}=kA^{\mathrm{T}}$　　(4) $(AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$

其中 k 为实数,规律中前三式显然成立,(4)的推证较繁,用例子加以说明。

例 10 已知 $A=\begin{bmatrix}2 & 4\\1 & -1\\3 & 1\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\\2 & 1 & 0\end{bmatrix}$

验证 $(AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$。

证: 因为

$$AB=\begin{bmatrix}2 & 4\\1 & -1\\3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\\2 & 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12 & 10 & 2\\0 & 2 & 1\\8 & 10 & 3\end{bmatrix}(AB)^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}12 & 0 & 8\\10 & 2 & 10\\2 & 1 & 3\end{bmatrix}$$

又因 $A^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\4 & -1 & 1\end{bmatrix}$ $B^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}2 & 2\\3 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$

$$B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}2 & 2\\3 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\4 & -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12 & 0 & 8\\10 & 2 & 10\\2 & 1 & 3\end{bmatrix}$$

故验证了 $(AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$

转置矩阵具有下面两个常用的特征:

设 A 为 n 阶方阵,如果 $A=A^{\mathrm{T}}$ 或 $a_{ij}=a_{ji}$,则称 A 为对称矩阵。例如

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 2 & 0\\3 & 2 & -1 & 1\\2 & -1 & 0 & 1\\0 & 1 & 1 & 4\end{bmatrix},\quad 则\ A^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1 & 3 & 2 & 0\\3 & 2 & -1 & 1\\2 & -1 & 0 & 1\\0 & 1 & 1 & 4\end{bmatrix}$$

即 $A=A^{\mathrm{T}}$,说明 A 是对称矩阵。

设 A 为 n 阶实数矩阵,如果有 $AA^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}A=I$,则称 A 为正交矩阵。例如

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & -1\\-1 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

由定义可以分别验证它们都是正交矩阵。从正交矩阵定义还可知道一个重要的性质,正交矩阵 $A_{n\times n}$ 中每一行(或列)的 n 个元素的平方和等于 1;不同行(或列)对应元素的乘积和等于 0。我们已经知道

$$A=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$$

是正交矩阵。若以行为例,可以验证

$$\cos^2\theta+(-\sin\theta)^2=1,\ \sin^2\theta+\cos^2\theta=1,\ 而\ \cos\theta\sin\theta+\cos\theta(-\sin\theta)=0$$

即说明了正交矩阵的重要性质。

四、方阵的行列式

因为方阵的行数和列数相等,所以我们可以定义方阵行列式。

【定义 7】 由 n 阶方阵 A 的元素所构成的行列式(各元素的位置不变)叫做方阵 A

的行列式,记作$|A|$,或 $\det A$。

方阵的行列式与我们讲到的 n 阶行列式一样,都是一个确定的数值。设 A、B 为 n 阶方阵,λ 为实数,方阵的行列式满足下述规律:

(1)$|A^{\mathrm{T}}|=|A|$;　　(2)$|\lambda A|=\lambda^n|A|$;　　(3)$|AB|=|A||B|$。

一般来说,A、B 分别是 n 阶方阵,有 $AB\neq BA$,但是,由(3)式可知,必有 $|AB|=|A||B|=|B||A|=|BA|$ 成立。

例 11　设 $A=\begin{bmatrix}1 & 3\\2 & -2\end{bmatrix}$,$B=\begin{bmatrix}2 & 5\\3 & 4\end{bmatrix}$,求$|AB|$的值。

解:　$|AB|=|A||B|=\begin{vmatrix}1 & 3\\2 & -2\end{vmatrix}\begin{vmatrix}2 & 5\\3 & 4\end{vmatrix}=(-8)(-7)=56$

此题还有另一种解法:

$$AB=\begin{bmatrix}11 & 17\\-2 & 2\end{bmatrix},\quad |AB|=\begin{vmatrix}11 & 17\\-2 & 2\end{vmatrix}=56$$

8.2.3　矩阵的逆

在数学中,对给定的一个数 $a\neq 0$,则$\frac{1}{a}$存在,并且有

$$a\cdot\frac{1}{a}=a\cdot a^{-1}=a^{-1}\cdot a=1$$

仿照上面的数学关系式,在矩阵中引进逆矩阵这个重要概念。

【定义 8】　设 A 是 n 阶方阵,I 是 n 阶单位方阵,如果有一个 n 阶方阵 B,使 $AB=BA=I$,则说方阵 A 是可逆的,并把方阵 B 称为方阵 A 的逆矩阵(inverse matrix),记 $B=A^{-1}$。

应注意到,A^{-1}是矩阵 A 的逆矩阵记号,决不能把 A^{-1}当作矩阵 A 的倒数$\frac{1}{A}$去理解。关于 n 阶方阵在什么条件下才有逆矩阵 A^{-1}存在,及求逆矩阵 A^{-1}的方法有如下定义和定理。

【定义 9】　设 A 是 n 阶方阵,若$|A|\neq 0$,则把方阵 A 称为非奇异矩阵;若$|A|=0$,则把方阵 A 称为奇异矩阵。

【定理 2】　方阵 A 有逆矩阵存在的充分必要条件是 A 为非奇异矩阵,且

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$$

其中 A^*称为方阵 A 的伴随方阵,它是$|A|$的各元素的代数余子式所构成的方阵

$$A^*=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1}\\A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2}\\\vdots & \vdots & & \vdots\\A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn}\end{bmatrix}$$

证明略。

例 12　求

$$A=\begin{bmatrix}1&0&1\\2&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}$$

的逆矩阵。

解： 因$|A|=2$,由定理2可知逆矩阵A^{-1}存在。且$|A|$的各元素代数余子式是

$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1&0\\1&1\end{vmatrix}=1$， $A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2&0\\1&1\end{vmatrix}=-2$， $A_{13}=1$， $A_{21}=1$，

$A_{22}=0$， $A_{23}=-1$， $A_{31}=-1$， $A_{32}=2$， $A_{33}=1$。

所以 $A^*=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&-1\\-2&0&2\\1&-1&1\end{bmatrix}$

故 $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1&-1\\-2&0&2\\1&-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\-1&0&1\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$

一般来说,对于一个n个未知量的n个线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\\vdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}$$

即$AX=B$。如果$|A|\neq0$,则A^{-1}存在,就可以用求逆矩阵的方法求上面的线性方程组的解。这是因为$AX=B$两边左乘A^{-1}得,$A^{-1}AX=A^{-1}B$,即$X=A^{-1}B$,其结果

$X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$就是上面线性方程组的解。

例 13 利用逆矩阵解方程组

$$\begin{cases}x_1+x_3=1\\2x_1+x_2=0\\x_1+x_2+x_3=2\end{cases}$$

解： 上面线性方程组可以写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix}1&0&1\\2&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}$$

或$AX=B$。由例12可知,$|A|=2$,逆矩阵存在且

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ -1 & 0 & 1\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

将 A^{-1}左乘 $AX=B$,$A^{-1}AX=A^{-1}B$,由 $A^{-1}A=I$,得

$$X=A^{-1}B=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ -1 & 0 & 1\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\ 1\\ \frac{3}{2}\end{bmatrix}$$

即 $x_1=-\frac{1}{2}$,$x_2=1$,$x_3=\frac{3}{2}$是线性方程组的解。

【定理 3】 若 $AB=I$(或 $BA=I$),则 $B=A^{-1}$。

证: $|A||B|=|I|=1$,故$|A|\neq 0$,因 A^{-1}存在,所以 $B=IB=(A^{-1}A)B=A^{-1}(AB)=A^{-1}I=A^{-1}$。

由定理 2,如果方阵 A 是可逆的,那么它的逆矩阵是唯一的。

关于逆矩阵有如下运算性质:

(1)若 A 可逆,则 A^{-1}亦可逆,且$(A^{-1})^{-1}=A$。

(2)若 A 可逆,数 $\lambda\neq 0$,则 λA 可逆,且$(\lambda A)^{-1}=\frac{1}{\lambda}A^{-1}$。

(3)若 A、B 为同阶方阵且均可逆,则 AB 亦可逆,且$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$。

(4)若 A 可逆,则 A^{T} 亦可逆,且$(A^{\mathrm{T}})^{-1}=(A^{-1})^{\mathrm{T}}$。

证性质(3):$(AB)(B^{-1}A^{-1})=A(BB^{-1})A^{-1}=AIA^{-1}=AA^{-1}=I$。即$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$。

证性质(4):$A^{\mathrm{T}}(A^{-1})^{\mathrm{T}}=(A^{-1}A)^{\mathrm{T}}=I^{\mathrm{T}}=I$ 即证明$(A^{\mathrm{T}})^{-1}=(A^{-1})^{\mathrm{T}}$。

性质(1)和(2)留给读者证明。

8.3 矩阵的初等变换与线性方程组

8.3.1 矩阵的秩和初等变换

【定义 10】 在 $m\times n$ 矩阵A 中,任何 k 行k 列位于这些行列的交点处的元素构成的 k 阶行列式$\{k\leqslant\min(m,n)\}$,称为矩阵 A 的k 阶子式。

例如:

$$A=\begin{bmatrix}2 & -3 & 8 & 2\\ 2 & -12 & -2 & 12\\ 1 & 3 & 1 & 4\end{bmatrix},\text{则}\begin{bmatrix}2 & -3 & 2\\ 2 & -12 & 12\\ 1 & 3 & 4\end{bmatrix},\begin{vmatrix}2 & -3\\ 2 & -12\end{vmatrix},|-3|$$ 分别是 A 的三阶、二阶、一阶子式。$m\times n$ 矩阵A 的k 阶子式共有$C_m^k\cdot C_n^k$ 个。

【定义 11】 若在矩阵 A 中有一个r 阶子式$D\neq 0$,且所有大于 r 阶的子式都等于零,则称矩阵 A 的秩(rank)为 r,记为 $R(A)=r$。

例 14 求矩阵

$$A=\begin{bmatrix}2 & -3 & 8 & 2\\2 & 12 & -2 & 12\\1 & 3 & 1 & 4\end{bmatrix}$$

的秩。

解： 因为 A 的所有三阶行列式都等于零，即 4 个三阶子式均为零。但是二阶子式

$$\begin{vmatrix}2 & -3\\2 & 12\end{vmatrix}=30\neq 0$$

所以，$R(A)=2$。

一般来讲，利用定义计算矩阵 $A_{m\times n}$ 的 k 阶子式需要计算 $C_m^k\cdot C_n^k$ 个行列式，为简化计算过程，下面引进矩阵的初等变换。

【定义 12】 下面的三种变换称为矩阵的初等行变换：

(1)对调两行(对调 i,j 两行，记作 $r_i\leftrightarrow r_j$)；

(2)以数 $k\neq 0$ 乘某一行中的所有元素(第 i 行乘 k，记作 kr_i)；

(3)把某一行所有元素的 k 倍加到另一行对应元素上去(第 j 行的 k 倍加到第 i 行上，记作 r_i+kr_j)。

把定义中的“行”换成“列”即得矩阵的初等列变换的定义(所用的记号是把“r”换成“c”)。矩阵的初等行变换和初等列变换，统称初等变换(elementary transformation)。

如果矩阵 A 经过有限次初等变换变成矩阵 B，就称矩阵 A 与矩阵 B 等价，记作 $A\sim B$。

对任何矩阵经过初等变换后，其秩有如下关系。

【定理 4】 若 $A\sim B$，则 $R(A)=R(B)$。

证明略。

例 15 求矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3 & -1\\3 & -1 & 5 & -3\\2 & 1 & 2 & -2\end{bmatrix}$$

的秩。

解：

$$A\xrightarrow{r_2+(-3)r_1}\begin{bmatrix}1 & -2 & 3 & -1\\0 & 5 & -4 & 0\\2 & 1 & 2 & -2\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3+(-2)r_1}\begin{bmatrix}1 & -2 & 3 & -1\\0 & 5 & -4 & 0\\0 & 5 & -4 & 0\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3+(-1)r_2}$$

$$\begin{bmatrix}1 & -2 & 3 & -1\\0 & 5 & -4 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=B$$

显然，矩阵 B 的三阶子式全都是零，而

$$\begin{vmatrix}1 & -2\\0 & 5\end{vmatrix}=5\neq 0$$

故 $R(A)=R(B)=2$，即矩阵 A 的秩为 2。

一般来说，一个矩阵 $A_{m\times n}$经初等行变换变成矩阵$B_{m\times n}$形式为

$$B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1r} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{21} & \cdots & b_{2r} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{rr} & \cdots & b_{rn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

这时很容易看出 A 的秩数为r。这也是求矩阵常用的方法。用计算机计算矩阵的秩数，通常也采用此方法。

8.3.2 利用初等变换求逆矩阵

用初等变换求逆矩阵的方法是：将所求的可逆矩阵 $A(|A|\neq 0)$的右侧添置一个与 A 同阶的单位矩阵I_n，构成一个 $n\times 2n$ 的矩阵$[A|I]$，对此矩阵施以初等行变换(不能同时进行列变换)，将它的左半部化成单位矩阵后，右半部便是 A^{-1}，即

$$[A|I]_{n\times 2n}\xrightarrow{\text{经初等行变换}}[I|A^{-1}]_{n\times 2n}$$

例16 设

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

求 A^{-1}。

解：

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]\xrightarrow[r_3+(-3)r_1]{r_2+(-2)r_1}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right]\xrightarrow[r_3+(-1)r_1]{r_1+r_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right]\xrightarrow[r_2+(-5)r_3]{r_1+(-2)r_3}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 3 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[r_3\times(-1)]{r_2\times(-\frac{1}{2})}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

所以 $$A^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2} \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}。$$

对可逆矩阵 A 也可进行列初等变换求逆，用如下方式进行：

$$\left[\frac{A}{I}\right]_{2n\times n}\xrightarrow{\text{经初等列变换}}\left[\frac{I}{A^{-1}}\right]_{2n\times n}$$

在这里特别指出：用初等变换求逆矩阵时，或者对行或者对列，二者不能同时进行初等变换。

8.3.3 矩阵的初等行变换与线性方程组

设线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{8-6}$$

当常数项 b_1、$b_2\cdots$、b_m 全为零时,方程组(8-6)式称为齐次线性方程组(system of linear homogeneous equation),当常数项 b_1、b_2、$\cdots$、b_m 不全为零时,方程组(8-6)为非齐次线性方程组(system of linear nonhomogeneous equation)。

方程组(8-6)的系数矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

将方程组的常数项添加在矩阵 A 的最右边构成一个 $m\times(n+1)$矩阵

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

把矩阵 B 称作方程组(8-6)的增广矩阵。

对于线性方程组(8-6),如何判定它是否有解?如果有解,解的情况如何?又怎样去求解?我们以二元线性方程组为例,加以分析。

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases} \tag{8-7a}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ 2x_2 + x_1 = 2 \end{cases} \tag{8-7b}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases} \tag{8-7c}$$

通过计算可知,(8-7a)无解;(8-7b)有唯一的解;(8-7c)有无穷多解。我们将它们的增广矩阵秩数与其相对系数矩阵秩数进行比较,增广矩阵秩(8-7a,b,c),及相应的系数矩阵秩分别表示如下:

$$2 = 秩\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \neq 秩\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 1$$

$$2 = 秩\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} = 秩\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = 2$$

$$1 = 秩\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} = 秩\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = 1$$

从上述讨论我们看到,当秩 B 不等于秩 A 时,方程组无解;当秩 B 等于秩 A 时方程组才有解,而且,增广矩阵的秩数等于矩阵 A 的列数时有唯一解;增广矩阵的秩数小于矩阵 A 的列数时有无穷多解。

【定理 5】 线性方程组(8-6)有解的充分必要条件是它的系数矩阵 A 与增广矩阵 B 有相同的秩,即 $R(B)=R(A)$;并且 $R(A)=n$ 时方程组(8-6)有唯一解,$R(A)<n$ 时方程组(8-6)有无穷多解。证明略。

在解线性方程组时,必须对增广矩阵实行初等行变换,若对增广矩阵 B 实行矩阵的初等列变换,会改变线性方程组变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的排列顺序,因此不能进行列变换。对增广矩阵实行初等行变换不改变增广矩阵 B 和系数矩阵 A 的秩。下面研究定理 4 的应用。

例 17 判断线性方程组解的情况

$$\begin{cases} x_1-x_2+2x_3=1 \\ x_1-2x_2-x_3=2 \\ 3x_1-x_2+5x_3=3 \\ -2x_1+2x_2+3x_3=-4 \end{cases}$$

解: 对增广矩阵 B 实行初等行变换:

$$B=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 5 & 3 \\ -2 & 2 & 3 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3+(-3)r_1]{r_2+(-1)r_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3+2r_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2+r_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

经过行变换后,增广矩阵与系数矩阵秩相等,即 $R(A)=R(B)$,则方程组有解;又因 $R(A)=3=n$,所以方程组有唯一解。

在求线性方程组的解时,我们应该注意遵守下面三个原则:

(1)对于方程组只进行初等行变换,它不会影响方程组的解,即原来方程组和变换后的方程组是等价(或同解)方程组。

(2)矩阵 B 经初等行变换后,若其一行全为 0,那么这一行所确定的方程是多余的方程(因为它对任何解都满足),可以去掉这一行的方程;若在 B 中能找到不为 0 的子行列式,那么它所确定的方程是保留方程,所有这些保留方程组成了原方程组的解。

(3)在对 B 进行初等行变换中,时刻判断增广矩阵的秩是否等于系数矩阵的秩(即判断增广矩阵和系数矩阵中存在的最高阶不为 0 的子行列式阶数是否相等),若不等,方程组无解;若相等,秩数等于变量个数(n)则有唯一解,秩数不等于变量个数(n)则方程组有无穷多解。

将例 17 问题改为求解线性方程组。根据上述原则(2),可去掉增广矩阵变化后第四行元素(因为这行全为 0),又因为经过初等行变换后的增广矩阵中,有三阶子式不为零,即

$$\begin{vmatrix}1 & -1 & 2\\0 & -1 & -3\\0 & 0 & -7\end{vmatrix}=7\neq 0$$

所以原方程组同解方程组为

$$\begin{cases}x_1-x_2+2x_3=1\\-x_2-3x_3=1\\-7x_3=2\end{cases}$$

而且变量个数与增广矩阵秩数相同,故原方程组有唯一解:

$$x_3=-\frac{2}{7};x_2=-1+\frac{6}{7}=-\frac{1}{7};x_1=1+(-\frac{1}{7})-2(-\frac{2}{7})=\frac{10}{7}。$$

例 18 求解线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+3x_3-x_4=1\\3x_1-x_2-3x_3+4x_4=4\\x_1+5x_2-9x_3-8x_4=0\end{cases}$$

解: 对增广矩阵作初等行变换

$$B=\begin{bmatrix}1 & 1 & -3 & -1 & 1\\3 & -1 & -3 & 4 & 4\\1 & 5 & -9 & -8 & 0\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-3r_1}\begin{bmatrix}1 & 1 & -3 & -1 & 1\\0 & -4 & 6 & 7 & 1\\0 & 4 & -6 & -7 & -1\end{bmatrix}\xrightarrow[(\frac{1}{4})\times r_3]{r_2+r_3}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & -3 & -1 & 1\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & -\frac{6}{4} & -\frac{7}{4} & -\frac{1}{4}\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1-r_3}\begin{bmatrix}1 & 0 & -\frac{6}{4} & \frac{3}{4} & \frac{5}{4}\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & -\frac{6}{4} & -\frac{7}{4} & -\frac{1}{4}\end{bmatrix}$$

显然 $R(A)=R(B)$ 即增广矩阵和系数矩阵的最大阶为 2 的子行列式不为零,即方程有解;又因 $R(A)=2<4=n$,所以方程组有无穷多组解,与原方程组的同解方程组是

$$\begin{cases}x_1-\frac{6}{4}x_3+\frac{3}{4}x_4=\frac{5}{4}\\x_2-\frac{6}{4}x_3-\frac{7}{4}x_4=-\frac{1}{4}\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}x_1=\frac{5}{4}+\frac{6}{4}x_3-\frac{3}{4}x_4\\x_2=-\frac{1}{4}+\frac{6}{4}x_3+\frac{7}{4}x_4\end{cases}$$

因自由变量 x_3,x_4 可以取任意值,令 $x_3=C_1,x_4=C_2$,故有一般解:

$$\begin{cases}x_1=\frac{5}{4}+\frac{6}{4}C_1-\frac{3}{4}C_2\\x_2=-\frac{1}{4}+\frac{6}{4}C_1+\frac{7}{4}C_2\\x_3=C_1\\x_4=C_2\end{cases}$$

当 $C_1=0, C_2=0$ 时,例 21 有一个特解: $x_1=\frac{5}{4}, x_2=-\frac{1}{4}, x_3=0, x_4=0$。

这里顺便提醒读者,当线性方程组有无穷多组解时,任意常数的个数(自由变量的个数)等于 $n-R(A)$。

对于式(8-6)的线性方程组,若右端常数项全为零,则为齐次线性方程组。它的系数矩阵 A 与增广矩阵 B 的秩总是相等的,即 $R(A)=R(B)$,所以齐次线性方程组总是有解的,并由定理 4 知道:

(1)当 $R(A)=n$ 时,齐次方程组有唯一一组解,即只有零解($x_1=0, x_2=0, \cdots, x_n=0$)。

(2)当 $R(A)<n$ 时,齐次线性方程组有无穷多组解,并容易知道齐次线性方程组有非零解的充要条件是 $R(A)<n$。

例 19 求解齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+3x_5=0 \\ 2x_1-x_2+x_4-x_5=0 \\ 3x_1+x_2-x_3+x_4+2x_5=0 \\ -5x_2+2x_3+x_4-7x_5=0 \end{cases}$$

解:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 2 & 1 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3+(-3)r_1]{r_2+(-2)r_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & -5 & 2 & 1 & -7 \\ 0 & -5 & 2 & 1 & -7 \\ 0 & -5 & 2 & 1 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_4+(-1)r_2]{r_3+(-1)r_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & -5 & 2 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_1+(-2)r_2]{(-\frac{1}{5})r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{7}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

由于 $R(A)=2<n=5$,故有非零解,其原方程组同解方程组为

$$\begin{cases} x_1-\frac{1}{5}x_3+\frac{2}{5}x_4+\frac{1}{5}x_5=0 \\ x_2-\frac{2}{5}x_3-\frac{1}{5}x_4+\frac{7}{5}x_5=0 \end{cases}$$

令 $x_3=C_1, x_4=C_2, x_5=C_3$,故得非零解:

$$\begin{cases} x_1=\frac{1}{5}C_1-\frac{2}{5}C_2-\frac{1}{5}C_3 \\ x_2=\frac{2}{5}C_1+\frac{1}{5}C_2-\frac{7}{5}C_3 \\ x_3=C_1 \\ x_4=C_2 \\ x_5=C_3 \end{cases}$$

例 20 求解方程组

$$\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-x_4=1 \\ 3x_1-x_2+5x_3-3x_4=2 \\ 2x_1+x_2+2x_3-2x_4=3 \end{cases}$$

解:

$$B=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & -2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3+(-2)r_1]{r_2+(-3)r_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3+(-1)r_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

在 B 中第三行所表示的方程出现矛盾，即 $R(A)=2\neq3=R(B)$，故原方程组无解。

例 21 在图 8-2 中，设血液往血管分支点流动的流率为 z，经两条血管离开分支点的流动的流率分别为 x 和 y，则

$$z = x + y,$$

又假设各条血管距支点一定距离处的压强分别为 p_x、p_y 及 p_z（血管端点的压强 p_x、p_y、p_z 是可以测得的），在分支点的压强为 p；试用线性方程组求出 x、y、z 及 p。

解: 假设压降（对分支点的压强差）与流率成正比，则得

$$\begin{cases} x + y = z \\ zR_z = p_z - p \\ xR_x = p - p_x \\ yR_y = p - p_y \end{cases}$$

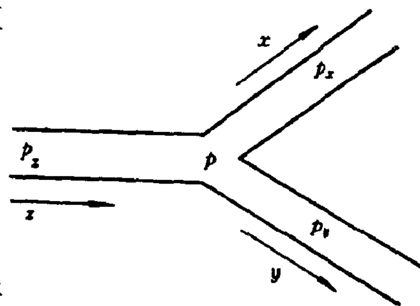


图 8-2

其中 R_z、R_y、R_x 分别为三条血管相应的比例系数，将转成右端为常数项的非齐次线性方程组，

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ R_2 z + p = p_z \\ -R_x x + p = p_x \\ -R_y y + p = p_y \end{cases}$$

系数矩阵的行列式

$$|A| = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & R_2 & 1 \\ -R_x & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -R_y & 0 & 1 \end{bmatrix} = -(R_xR_y+R_yR_z+R_zR_x)\neq0$$

即增广矩秩与系数矩阵秩相等，且秩数也等于变量个数 4，非齐次线性方程组有唯一解：

$$x=\frac{R_y(p_z-p_x)-R_z(p_x-p_y)}{R_xR_y+R_yR_z+R_zR_x}$$

$$y=\frac{R_z(p_x-p_y)-R_x(p_y-p_z)}{R_xR_y+R_yR_z+R_zR_x}$$

$$z=\frac{R_y(p_z-p_x)-R_x(p_y-p_z)}{R_xR_y+R_yR_z+R_zR_x}$$

$$p=\frac{R_xR_yp_z+R_yR_zp_x+R_zR_xp_y}{R_xR_y+R_yR_z+R_zR_x}$$

8.4* 矩阵的特征值与特征向量

矩阵的特征值与特征向量在理论和实际研究中有重要意义,如数学上的特征向量空间,医学上的莱斯利(LesLie)人口模型,医学统计中的多变量分析等,都用到矩阵的特征值和特征向量。因此给出它们的概念。

【定义 13】 设 A 是 n 阶方阵,如果数 λ 和具有 n 行的列矩阵 X(n 维列向量)使下式成立

$$AX=\lambda X \tag{8-8}$$

则称数 λ 为方阵 A 的特征值(eigen value),非零列向量 X(n 维列向量)称为矩阵 A 的特征值 λ 对应的特征向量(eigen vector)。

将式(8-8)写成

$$AX=\lambda IX$$

移项得

$$(\lambda I-A)X=0 \tag{8-9}$$

其中

$$\lambda I-A=\begin{pmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn}\end{pmatrix}$$

叫做 A 的特征矩阵。

将式(8-9)展开为 n 元齐次线性方程组,即:

$$\begin{cases}(\lambda-a_{11})x_1-a_{12}x_2-\cdots-a_{1n}x_n=0\\ -a_{21}x_1+(\lambda-a_{22})x_2-\cdots-a_{2n}x_n=0\\ -a_{1n}x_1-a_{2n}x_2-\cdots+(\lambda-a_{nn})x_n=0\end{cases}$$

它有非零解的充分必要条件是系数行列式

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn}\end{vmatrix}=0$$

$|\lambda I-A|$ 是关于 λ 的 n 次多项式,称为矩阵 A 的特征多项式,$|\lambda I-A|=0$ 则称为矩阵 A 的特征方程。A 的特征值正是它的特征方程的解,而特征向量即是齐次线性方程组 $(\lambda I-A)X=0$ 的非零解向量。因此,可给出求矩阵 A 的特征值和特征向量的具体方法:(1)用求行列式的方法计算特征多项式 $|\lambda I-A|$;(2)解特征方程 $|\lambda I-A|=0$,求出特征值

λ;(3)把每一个特征值代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$,求出方程组的非零解 X,即是属于 λ 的特征向量。

例 22 求矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}$$

的特征值和特征向量。

解: 1.计算特征多项式:

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&-2\\-2&\lambda-1&-2\\-2&-2&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda+1)^2(\lambda-5)$$

2.求特征方程的特征根:

$$(\lambda+1)^2(\lambda-5)=0,\lambda_1=-1\text{ 为二重根},\lambda_2=5$$

3.求特征向量:把特征值 -1 代入齐次线性方程组

$$\begin{cases}(\lambda-1)x_1-2x_2-2x_3=0\\-2x_1+(\lambda-1)x_2-2x_3=0\\-2x_1-2x_2+(\lambda-1)x_3=0\end{cases}$$

得到

$$\begin{cases}-2x_1-2x_2-2x_3=0\\-2x_1-2x_2-2x_3=0\\-2x_1-2x_2-2x_3=0\end{cases}$$

解上述齐次线性方程组,得到一组非零解 $x_1=1,x_2=0,x_3=-1$,于是属于 $\lambda_1=-1$ 的特征向量

$$X=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$$

同样,把 $\lambda_2=5$ 代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$,可得到一组非零解 $x_1=1,x_2=1,x_3=1$,于是也有属于 $\lambda_2=5$ 的特征向量

$$X=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

请注意,λ 是特征值,若 x 是属于λ 的特征向量,则 kx(常数 $k\neq0$)满足线性方程组 $(\lambda I-A)kx=0$ 同样 kx 也是属于λ 的特征向量。所以特征向量不是由一个特征值唯一确定。反之,不同特征值所对应的特征向量决不会相等,也就是说一个特征向量只能属于一个特征值。

8.5* 线性代数初步在计算机实验室中的教学实践

把计算机机房作为医学高等数学的实验室是教学改革的重要内容,尤其是线性代数

用计算机进行教学势在必行。首先线性代数在实际应用时几乎是靠计算机完成的，另外，线性代数运算既复杂又有规律，这正适合计算机计算的特点；其次，在计算机实验室中进行教学，不仅使线性代数概念和理论与实际复杂计算相结合，而且培养和锻炼医学生动手和应用计算机能力；还有，利用计算机教学可以缩减教学学时数。为此，本节只根据本章内容顺序，初略地安排线性代数在计算机机房中的教学做法。

8.5.1 行列式与计算机求行列式值

以本章第一节开头的行列式定义为基础，再用行列式定义证明上三角行列式的值等于主对角线上元素的乘积，然后使学生知道任何一个 n 阶行列式最多经过$(n^3+2n-3)/3$次乘法和除法就能变成上三角行列式，计算机正适按照这个机械的方法，计算出行列式的数值。让学生马上用计算机计算行列式的值。简单介绍行列式性质。

8.5.2 矩阵理论和计算机求逆矩阵

矩阵是抽象思维、运算和推理的一种重要工具，所以我们坚持 8.2 节的教学内容和安排顺序。只是在引出逆矩阵前，先给出代数余子式的概念，然后让学生知道计算机可按照伴随矩阵方法求逆矩阵，再操作计算机求逆矩阵。8.2 节加强研究矩阵的概念和理论研究的教学思想不变。

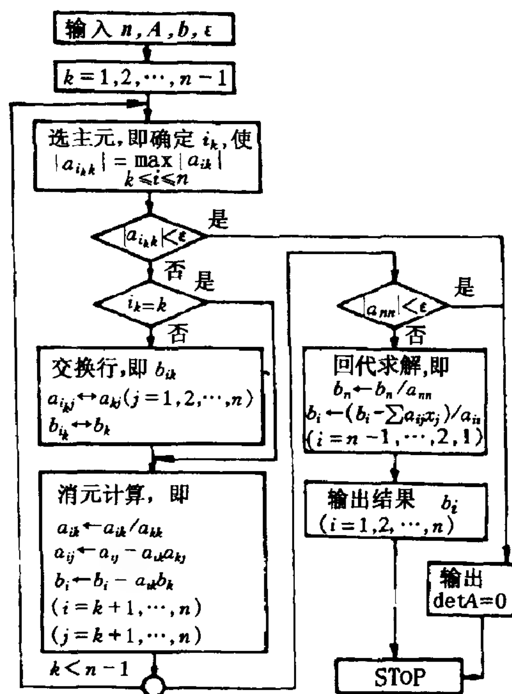


图 8-3

8.5.3 用计算机求解线性方程组

由 8.3 节，直接给出矩阵的秩，非齐次和齐次线性方程组的概念，再从二元线性方程组的解的情况出发，扩展到非齐次线性方程组无解，有唯一解，有无穷多解，以及齐次线性方程组有唯一解和无穷多解的情况。最后让学生了解一些计算机用主元消去法解线性方程组的道理，并直接用计算机解线性方程组。

8.4 节矩阵的特征值与特征向量的教学安排不变，即按 8.4 节内容进行教学。

本章利用计算机工具进行教学思想是：仍坚持线性代数初步中的基本概念、基本理论、基本方法为主的教学方针，仅是求行列式的值，求逆矩阵、解线性方程组可直接用计算机计算结果，减少复杂计算，为学生在医学上用计算机处理定量问题开拓思维方法。在用计算机计算时，只要求学生掌握使用计算机操作方法，以及对计算机计算的结果进行分析，关于计算机按哪种数学算法和怎样编写程序可不做要求。

关于使用哪种线性代数中的微机计算程序以及微机操作方法，种类较多，怎样使用计算机由教师根据具体情况自行安排。这里仅介绍用计算机计算线性方程组的一种算法，

关于用计算机计算行列式的值和求逆矩阵就不介绍了。

用计算机计算线性方程组的解的方法中,使用最广的是列主元素消去法。用列主元素消去法解线性方程组 $AX=b$ 的程序框图见图 8-3。图中 ε 作控制常数,通常为比较小的正实数,当某个选出的主元或完成消元后的系数 a_{nn} 的绝对值小于 ε 时,就认为 $\det A \approx 0$,从而中止计算。为了节省工作单元,图中还用 $A^{(k)}$ 冲掉 A,$b^{(k)}$ 冲掉 b,并注意到 A 的下三角部分都应变为零,而且在进行第 k 次消元计算时,算出乘数 m_{ik} 后 a_{ik} 不在起作用,故用 m_{ik} 冲掉 a_{ik},回代后所得的解 X 放在数组 b 内。

例 23 用列主元素消去法解线性方程组

$$\begin{cases}-0.002x_1+2x_2+2x_3=0.4\\ x_1+0.78125x_2=1.3816\\ 3.996x_1+5.5625x_2+4x_3=7.4178\end{cases}$$

(计算过程取 5 位有效数字。)

解: 第一次消元对

$$[A^{(1)}|b^{(1)}]=\left[\begin{array}{ccc|c}-0.002 & 2 & 2 & 0.4\\ 1 & 0.78125 & 0 & 1.3816\\ \boxed{3.996} & 5.5625 & 4 & 7.4178\end{array}\right]$$

因列主元素为 $a_{31}^{(1)}$,故作行变换 $r_1 \leftrightarrow r_3$,然后进行消元计算可得

$$[A^{(2)}|b^{(2)}]=\left[\begin{array}{ccc|c}3.996 & 5.5625 & 4 & 7.4178\\ 0 & -0.61077 & -1.0010 & -0.47471\\ 0 & \boxed{2.0029} & 2.0020 & 0.40371\end{array}\right]$$

第二次消元对 $[A^{(2)}|b^{(2)}]$,因列主元素为 $a_{32}^{(2)}$,故先作行变换 $r_2 \leftrightarrow r_3$,然后进行消元计算可得

$$[A^{(3)}|b^{(3)}]=\left[\begin{array}{ccc|c}3.996 & 5.5625 & 4 & 7.4178\\ 0 & 2.0029 & 2.0020 & 0.40371\\ 0 & 0 & -0.39050 & -0.35160\end{array}\right]$$

由此回代,即得方程组的计算解为

$$k=[1.9272\quad -0.69841\quad 0.90038]^{\mathrm{T}}$$

与具有 5 位有效数字的精确解 $k=[1.9273\quad -0.69850\quad 0.90042]^{\mathrm{T}}$ 相比较,所得计算解是比较准确的。

在实际应用中,变量个数不仅是三个变量,而是十几个或上百个变量,用计算机解变量个数比较多的线性方程组会方便简捷的多。

小　　结

本章介绍了行列式的概念和性质,强调用它们求行列式值的方法;重点讲述矩阵、逆矩阵、转置矩阵、矩阵秩数的概念、性质及其运算;叙述了线性方程组解的结构,会利用初等变换求矩阵的秩、逆矩阵,特别是用初等行变换求解线性方程组。

本章对矩阵的特征值和特征向量只是粗浅的介绍,它在理论和应用上都有重要的价

值;最后给出借助计算机工具讲授线性代数初步的一种新的教学方法。

习　题

1.计算下列各行列式的值。

(1) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$　(2) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 4 & 3 \\ -1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$　(3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$

2.计算行列式。

(1) $\begin{vmatrix} -ab & ac & ae \\ bd & -cd & de \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix}$　(2) $\begin{vmatrix} a+b & c & c \\ a & b+c & a \\ b & b & c+a \end{vmatrix}$

3.计算 n 阶行列式

(1) $\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$　(2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & n \end{vmatrix}$

4.试确定矩阵中的未知数 a,b,c。

(1) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & -1 \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & b \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

(2) $\begin{bmatrix} a^2 & 1 & b^2 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} a & 2 & 1 \\ -1 & c & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & -3 & 7 \\ 2 & -8 & -5 \end{bmatrix}$

5.设矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(1)求 $3A-B$;

(2)解矩阵方程 $A+X=B$,求 X;

(3)解矩阵方程 $(2A+Y)+2(B-Y)=0_{4\times 4}$求 Y。

6.计算下列矩阵的乘积。

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

(2) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$　(3) $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

7.举例说明两个非零矩阵的乘积能是零矩阵吗?

8. 设矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 3\\ 4 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

求$(AB)^{T}$。

9. 设矩阵

$$A=\begin{bmatrix}2 & 4\\ 1 & -1\\ 3 & 1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

验证$(AB)^{T}=B^{T}A^{T}$。

10. 用伴随矩阵的方法求矩阵的逆：

(1) $\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}$　(2) $\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$　(3) $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 4\end{bmatrix}$　(4) $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 2 & 1\\ 3 & 4 & 3\end{bmatrix}$

11. 解下列矩阵方程。

(1) $\begin{bmatrix}x_{11} & x_{12}\\ x_{21} & x_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -2\\ 5 & -4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ -5 & 6\end{bmatrix}$

(2) $\begin{bmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{11} & x_{12}\\ x_{21} & x_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & -6\\ 2 & 1\end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix}1 & 4\\ -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{11} & x_{12}\\ x_{21} & x_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}$

12. 用初等行变换求矩阵的逆。

(1) $\begin{bmatrix}0 & 1 & 3\\ 2 & 3 & 5\\ 3 & 5 & 7\end{bmatrix}$　(2) $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 2 & 1\\ 3 & 4 & 3\end{bmatrix}$

13. 求下列矩阵的秩。

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 5\\ 2 & -1 & 3 & 7\\ 3 & 1 & 1 & 6\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 0\\ 2 & 3 & 3\\ 3 & 4 & 3\end{bmatrix}$$

14. 解线性方程组。

(1) $\begin{cases}x_1+x_2-3x_3-x_4=1\\ 3x_1-x_2-3x_3+4x_4=4\\ x_1+5x_2-9x_3-8x_4=0\end{cases}$　(2) $\begin{cases}x_1-x_2=3\\ 2x_1-x_2-x_3=-8\\ x_1+x_2-3x_3=-10\end{cases}$

(3) $\begin{cases}x_1+2x_2+x_3=5\\ 2x_1-x_2+3x_3=7\\ 3x_1+x_2+x_3=6\end{cases}$　(4) $\begin{cases}2x_1+7x_2+3x_3+x_4=6\\ 3x_1+5x_2+2x_3+2x_4=4\\ 9x_1+4x_2+x_3+7x_4-2\end{cases}$

15. 线性方程组。

$$\begin{cases}(\lambda+3)x_1+x_2+2x_3=\lambda\\ \lambda x_1+(\lambda-1)x_2+x_3=\lambda\\ 3(\lambda+1)x_1+\lambda x_2+(\lambda+3)x_3=3\end{cases}$$

λ 为何值时,(ⅰ)有唯一解;(ⅱ)有无穷多解;(ⅲ)无解。

16.求下列矩阵的特征值和特征向量。

(1) $\begin{bmatrix}3 & -1 & 1\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 2\end{bmatrix}$　　(2) $\begin{bmatrix}3 & 3 & 2\\ 1 & 1 & -2\\ -3 & -1 & 0\end{bmatrix}$

(罗永光　赵玉荣　马建忠)

附　　录

Ⅰ．简单不定积分表

（一）基本积分公式

1. $\int dx = x + C$

2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$　　（$n \neq -1$，n 为任意实数）

3. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$　　（$x \neq 0$）

4. $\int e^x dx = e^x + C$

5. $\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C$　　（$a > 0, a \neq 1$）

6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$

7. $\int \cos x dx = \sin x + C$

8. $\int \mathrm{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C$

9. $\int \cot x dx = \ln|\sin x| + C$

10. $\int \sec^2 x dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \mathrm{tg} x + C$

11. $\int \csc^2 x dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$

12. $\int \sec x dx = \int \frac{1}{\cos x} dx = \ln|\sec x + \mathrm{tg} x| + C = \ln|\mathrm{tg}(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})| + C$

13. $\int \csc x dx = \int \frac{1}{\sin x} dx = \ln|\csc x - \cot x| + C = \ln|\mathrm{tg}\frac{x}{2}| + C$

14. $\int \sec x \,\mathrm{tg} x dx = \sec x + C$

15. $\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$

16. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin\frac{x}{a} + C$ 或 $-\arccos\frac{x}{a} + C$

17. $\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \mathrm{arctg}\frac{x}{a} + C$　　（$a \neq 0$）

18. $\int \frac{1}{(x+a)(x+b)} dx = \frac{1}{b-a} \ln\left|\frac{x+a}{x+b}\right| + C$　　（$b \neq a$）

（二）有理函数的积分

19. $\int \frac{1}{a+bx} dx = \frac{1}{b} \ln|a+bx| + C$

20. $\int (a+bx)^n dx = \frac{(a+bx)^{n+1}}{b(n+1)} + C$　（$n \neq -1$）

21. $\int \frac{x}{(a+bx)^2} dx = \frac{1}{b^2}\left[\frac{a}{a+bx} + \ln|a+bx|\right] + C$

22. $\int \frac{x^2}{(a+bx)^2}dx = \frac{1}{b^3}\left[a+bx-\frac{a^2}{a+bx}-2a\ln|a+bx|\right]+C$

23. $\int \frac{x}{(a+bx)^3}dx = \frac{1}{b^2}\left[-\frac{1}{a+bx}+\frac{a}{2(a+bx)^2}\right]+C$

24. $\int \frac{x^2}{(a+bx)^3}dx = \frac{1}{b^3}\left[\ln|a+bx|+\frac{2}{a+bx}-\frac{a^2}{2(a+bx)^2}\right]+C$

25. $\int \frac{1}{x(a+bx)}dx = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a+bx}{x}\right|+C$

26. $\int \frac{1}{x^2(a+bx)}dx = -\frac{1}{ax}+\frac{b}{a^2}\ln\left|\frac{a+bx}{x}\right|+C$

27. $\int \frac{1}{x(a+bx)^2}dx = \frac{1}{a(a+bx)}-\frac{1}{a^2}\ln\left|\frac{a+bx}{x}\right|+C$

28. $\int \frac{1}{x^2(a+bx)^2}dx = -\frac{1}{a^3}\left[\frac{a+bx}{x}-2b\ln\left|\frac{a+bx}{x}\right|-\frac{b^2x}{a+bx}\right]+C$

29. $\int \frac{1}{a+bx^2}dx = \frac{1}{\sqrt{ab}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{ab}}{a}+C$ （a、b 同号）

30. $\int \frac{1}{a+bx^2}dx = \frac{1}{2\sqrt{-ab}}\ln\left|\frac{a+\sqrt{-ab}x}{a-\sqrt{-ab}x}\right|+C$ （a、b 异号）

31. $\int \frac{x}{a+bx^2}dx = \frac{1}{2b}\ln|a+bx^2|+C$

32. $\int \frac{x^2}{a+bx^2}dx = \frac{x}{b}-\frac{a}{b}\int\frac{dx}{a+bx^2}$

33. $\int \frac{1}{x^2(a+bx^2)}dx = -\frac{1}{ax}-\frac{b}{a}\int\frac{1}{a+bx^2}dx$

34. $\int \frac{1}{a+bx^3}dx = \frac{k}{3a}\left[\frac{1}{2}\ln\left|\frac{(k+x)^2}{k^2-kx+x^2}\right|+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2x-k}{k\sqrt{3}}\right]+C$ （$bk^3=a$）

35. $\int \frac{x}{a+bx^3}dx = \frac{1}{3bk}\left[\frac{1}{2}\ln\left|\frac{k^2-kx+x^2}{(k+x)^2}\right|+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2x-k}{k\sqrt{3}}+C\right]$ （$bk^3=a$）

36. $\int x(a^2\pm b^2x^2)^n dx = \frac{(a^2\pm b^2x^2)^{n+1}}{\pm 2b^2(n+1)}+C$ （$n\neq -1$）

37. $\int \frac{x}{a^2\pm b^2x^2}dx = \frac{1}{\pm 2b^2}\ln|a^2\pm b^2x^2|+C$

38. $\int \frac{1}{a^2+b^2x^2}dx = \frac{1}{ab}\operatorname{arctg}\frac{bx}{a}+C$

39. $\int \frac{1}{a^2-b^2x^2}dx = \frac{1}{2ab}\ln\left|\frac{a+bx}{a-bx}\right|+C$

40. $\int \frac{1}{x(a^2\pm b^2x^2)}dx = \frac{1}{2a^2}\ln\left|\frac{x^2}{a^2\pm b^2x^2}\right|+C$

41. $\int \frac{1}{x^2(a^2+b^2x^2)}dx = -\frac{1}{a^2x}-\frac{b}{a^3}\operatorname{arctg}\frac{b}{a}x+C$

42. $\int \frac{1}{(a^2+b^2x^2)^2}dx = \frac{x}{2a^2(a^2+b^2x^2)}+\frac{1}{2a^3b}\operatorname{arctg}\frac{bx}{a}+C$

43. $\int \frac{1}{(a^2-b^2x^2)^2}dx = \frac{x}{2a^2(a^2-b^2x^2)}+\frac{1}{4a^3b}\ln\left|\frac{a+bx}{a-bx}\right|+C$

44. $\int \frac{x^2}{(a^2+b^2x^2)^2}dx = -\frac{x}{2b^2(a^2+b^2x^2)}+\frac{1}{2b^3a}\operatorname{arctg}\frac{b}{a}x+C$

45. $\int \frac{1}{a+bx+cx^2}dx = \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2cx+b}{\sqrt{4ac-b^2}}\right)+C$ （$b^2<4ac$）

46. $\int \frac{1}{a+bx+cx^2}dx = \frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}\cdot\ln\left|\frac{2cx+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2cx+b+\sqrt{b^2-4ac}}\right|+C$ （$b^2>4ac$）

47. $\int \frac{Mx+N}{a+bx+cx^2}dx = \frac{M}{2c}\ln|a+bx+cx^2|+\left(N-\frac{bM}{2c}\right)\cdot\int\frac{dx}{a+bx+cx^2}+C$

（三）无理函数的积分

48. $\int x\sqrt{a+bx}\,\mathrm{d}x=-\frac{2(2a-3bx)(a+bx)^{\frac{3}{2}}}{15b^2}+C$

49. $\int x^2\sqrt{a+bx}\,\mathrm{d}x=\frac{2(8a^2-12abx+15b^2x^2)(a+bx)^{\frac{3}{2}}}{105b^3}+C$

50. $\int \frac{x}{\sqrt{a+bx}}\mathrm{d}x=-\frac{2(2a-bx)\sqrt{a+bx}}{3b^2}+C$

51. $\int \frac{x^2}{\sqrt{a+bx}}\mathrm{d}x=\frac{2(8a^2-4abx+3b^2x^2)\sqrt{a+bx}}{15b^3}+C$

52. $\int \frac{1}{x\sqrt{a+bx}}\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|\frac{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a}}\right|+C \quad (a>0)$

53. $\int \frac{1}{x\sqrt{a+bx}}\mathrm{d}x=-\frac{2}{\sqrt{-a}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a+bx}{-a}}+C \quad (a<0)$

54. $\int \frac{\sqrt{a+bx}}{x}\mathrm{d}x=2\sqrt{a+bx}+a\int\frac{1}{x\sqrt{a+bx}}\mathrm{d}x$

55. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}\mathrm{d}x=\ln|x+\sqrt{x^2\pm a^2}|+C$

56. $\int \sqrt{x^2\pm a^2}\,\mathrm{d}x=\frac{x}{2}\sqrt{x^2\pm a^2}\pm\frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2\pm a^2}|+C$

57. $\int (x^2\pm a^2)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x=\frac{x}{8}(2x^2\pm 5a^2)\sqrt{x^2\pm a^2}+\frac{3a^4}{8}\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+C$

58. $\int \frac{1}{(x^2\pm a^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x=\frac{x}{\pm a^2\sqrt{x^2\pm a^2}}+C$

59. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2\pm a^2}}\mathrm{d}x=\frac{x}{2}\sqrt{x^2\pm a^2}\mp\frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2\pm a^2}|+C$

60. $\int \frac{x^2}{(x^2\pm a^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x=-\frac{x}{\sqrt{x^2\pm a^2}}+\ln|x+\sqrt{x^2\pm a^2}|+C$

61. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+a^2}}\mathrm{d}x=-\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}\right|+C$

62. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-a^2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\operatorname{arcsec}\frac{x}{a}+C$ 或 $\frac{1}{a}\arccos\frac{a}{x}+C \quad (x>a)$

63. $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2\pm a^2}}\mathrm{d}x=\mp\frac{\sqrt{x^2\pm a^2}}{a^2x}+C$

64. $\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}\mathrm{d}x=\sqrt{x^2+a^2}-a\ln\left|\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}\right|+C$

65. $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\mathrm{d}x=\sqrt{x^2-a^2}-a\operatorname{arcsec}\frac{x}{a}+C$

66. $\int \frac{\sqrt{x^2\pm a^2}}{x^2}\mathrm{d}x=-\frac{\sqrt{x^2\pm a^2}}{x}+\ln|x+\sqrt{x^2\pm a^2}|+C$

67. $\int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C$

68. $\int (a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x=\frac{x}{8}(5a^2-2x^2)\sqrt{a^2-x^2}+\frac{3}{8}a^4\arcsin\frac{x}{a}+C$

69. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x=\arcsin\frac{x}{a}+C$

70. $\int \frac{1}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x=\frac{x}{a^2\sqrt{a^2-x^2}}+C$

71. $\int x^2 \sqrt{a^2 - x^2} \mathrm{d}x = \frac{x}{8}(2x^2 - a^2)\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^4}{8}\arcsin\frac{x}{a} + C$

72. $\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} \mathrm{d}x = -\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$

73. $\int \frac{x^2}{(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}} \mathrm{d}x = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \arcsin\frac{x}{a} + C$

74. $\int \frac{1}{x\sqrt{a^2 - x^2}} \mathrm{d}x = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x}\right| + C$

75. $\int \frac{1}{x^2\sqrt{a^2 - x^2}} \mathrm{d}x = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a^2 x} + C$

76. $\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} \mathrm{d}x = \sqrt{a^2 - x^2} - a\ln\left|\frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x}\right| + C$

77. $\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^2} \mathrm{d}x = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} - \arcsin\frac{x}{a} + C$

78. $\int \sqrt{2ax - x^2} \mathrm{d}x = \frac{x - a}{2}\sqrt{2ax - x^2} + \frac{a^2}{2}\arccos\left(1 - \frac{x}{a}\right) + C$

79. $\int x\sqrt{2ax - x^2} \mathrm{d}x = -\frac{3a^2 + ax - 2x^2}{6}\sqrt{2ax - x^2} + \frac{a^8}{2}\arccos(1 - \frac{x}{a}) + C$

80. $\int \frac{\sqrt{2ax - x^2}}{x} \mathrm{d}x = \sqrt{2ax - x^2} + a\arccos\left(1 - \frac{x}{a}\right) + C$

81. $\int \frac{\sqrt{2ax - x^2}}{x^2} \mathrm{d}x = -\frac{2\sqrt{2ax - x^2}}{x} - \arccos\left(1 - \frac{x}{a}\right) + C$

82. $\int \frac{\sqrt{2ax - x^2}}{x^3} \mathrm{d}x = -\frac{(2ax - x^2)^{\frac{3}{2}}}{3ax^3} + C$

83. $\int \frac{1}{\sqrt{2ax - x^2}} \mathrm{d}x = \arccos\left(1 - \frac{x}{a}\right) + C$

84. $\int \frac{x}{\sqrt{2ax - x^2}} \mathrm{d}x = -\sqrt{2ax - x^2} + a\arccos\left(1 - \frac{x}{a}\right) + C$

85. $\int \frac{x^2}{\sqrt{2ax - x^2}} \mathrm{d}x = -\frac{(x + 3a)\sqrt{2ax - x^2}}{2} + \frac{3a^2}{2}\arccos\left(1 - \frac{x}{a}\right) + C$

86. $\int \frac{1}{x\sqrt{2ax - x^2}} \mathrm{d}x = -\frac{\sqrt{2ax - x^2}}{ax} + C$

87. $\int \frac{1}{(2ax - x^2)^{\frac{3}{2}}} \mathrm{d}x = \frac{x - a}{a^2\sqrt{2ax - x^2}} + C$

88. $\int \frac{x}{(2ax - x^2)^{\frac{3}{2}}} \mathrm{d}x = \frac{x}{a\sqrt{2ax - x^2}} + C$

89. $\int \frac{1}{\sqrt{2ax + x^2}} \mathrm{d}x = \ln|x + a + \sqrt{2ax + x^2}| + C$

90. $\int \sqrt{a + bx + cx^2} \mathrm{d}x = \frac{2cx + b}{4c}\sqrt{a + bx + cx^2} - \frac{b^2 - 4ac}{8c^{\frac{3}{2}}}\ln|2cx + b + 2\sqrt{c}\sqrt{a + bx + cx^2}| + C$

91. $\int \sqrt{a + bx - cx^2} \mathrm{d}x = \frac{2cx - b}{4c}\sqrt{a + bx - cx^2} + \frac{b^2 + 4ac}{8c^{\frac{3}{2}}}\arcsin\left(\frac{2cx - b}{\sqrt{b^2 + 4ac}}\right) + C$

92. $\int \frac{1}{\sqrt{a + bx + cx^2}} \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{c}}\ln|2cx + b + 2\sqrt{c}\sqrt{a + bx + cx^2}| + C$

93. $\int \frac{1}{\sqrt{a + bx - cx^2}} \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{c}}\arcsin\left(\frac{2cx - b}{\sqrt{b^2 + 4ac}}\right) + C$

94. $\int \frac{x}{\sqrt{a + bx + cx^2}} \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{a + bx + cx^2}}{c} - \frac{b}{2c^{\frac{3}{2}}}\ln\left|2cx + b + 2\sqrt{c}\sqrt{a + bx + cx^2}\right| + C$

95. $\int \frac{x}{\sqrt{a+bx-cx^2}}dx = -\frac{\sqrt{a+bx-cx^2}}{c} + \frac{b}{2c^{\frac{3}{2}}}\arcsin(\frac{2cx-b}{\sqrt{b^2+4ac}}) + C$

96. $\int \sqrt{\frac{a+x}{b+x}}dx = \sqrt{(a+x)(b+x)} + (a-b)\ln(\sqrt{a+x}+\sqrt{b+x}) + C$

97. $\int \sqrt{\frac{a-x}{b+x}}dx = \sqrt{(a-x)(b+x)} + (a+b)\arcsin\sqrt{\frac{x+b}{a+b}} + C$

98. $\int \sqrt{\frac{a+x}{b-x}}dx = -\sqrt{(a+x)(b-x)} - (a+b)\arcsin\sqrt{\frac{b-x}{a+b}} + C$

99. $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx = -\sqrt{1-x^2} + \arcsin x + C$

100. $\int \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}dx = 2\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}} + C$

(四) 超越函数的积分

101. $\int e^{ax}dx = \frac{e^{ax}}{a} + C$

102. $\int b^{ax}dx = \frac{b^{ax}}{a\ln b} + C$

103. $\int \ln x dx = x\ln x - x + C$

104. $\int x^n \ln x dx = x^{n+1}\left[\frac{\ln x}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}\right] + C$

105. $\int e^{ax}\ln x dx = \frac{e^{ax}\ln x}{a} - \frac{1}{a}\int \frac{e^{ax}}{x}dx$

106. $\int \frac{1}{x\ln x}dx = \ln|\ln x| + C$

107. $\int \sin^2 x dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$

108. $\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$

109. $\int \cos^n x \sin x dx = -\frac{\cos^{n+1}x}{n+1} + C$

110. $\int \sin^n x \cos x dx = \frac{\sin^{n+1}x}{n+1} + C$

111. $\int \sin mx \sin nx dx = -\frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} + C$

112. $\int \cos mx \cos nx dx = \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} + C$

113. $\int \sin mx \cos nx dx = -\frac{\cos(m+n)x}{2(m+n)} - \frac{\cos(m-n)x}{2(m-n)} + C$

114. $\int \frac{dx}{a+b\cos x} = \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\ln\left|\frac{\sqrt{b^2-a^2}\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}+b+a}{\sqrt{b^2-a^2}\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}-b-a}\right| + C \qquad (a^2<b^2)$

115. $\int \frac{dx}{a+b\cos x} = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\mathrm{arctg}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right) + C \qquad (a^2>b^2)$

116. $\int \frac{dx}{a+b\sin x} = \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\ln\left|\frac{a\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}+b-\sqrt{b^2-a^2}}{a\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}+b+\sqrt{b^2-a^2}}\right| + C \qquad (a^2<b^2)$

117. $\int \frac{dx}{a+b\sin x} = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\mathrm{arctg}\left(\frac{a\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}+b}{\sqrt{a^2-b^2}}\right) + C \qquad (a^2>b^2)$

118. $\int \frac{dx}{1+\cos x} = \operatorname{tg}\frac{x}{2} + C$

119. $\int \frac{dx}{1-\cos x} = -\cot\frac{x}{2} + C$

120. $\int \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x} = \frac{1}{ab}\operatorname{arctg}(\frac{b\operatorname{tg}x}{a}) + C$

121. $\int e^{ax}\sin nx\,dx = \frac{e^{ax}(a\sin nx - n\cos nx)}{a^2+n^2} + C$

122. $\int e^{ax}\cos nx\,dx = \frac{e^{ax}(n\sin x + a\cos nx)}{a^2+n^2} + C$

123. $\int x\sin nx\,dx = \frac{1}{n^2}\sin nx - \frac{1}{n}x\cos nx + C$

124. $\int x\cos nx\,dx = \frac{1}{n^2}\cos nx + \frac{1}{n}x\sin nx + C$

125. $\int x^2\sin nx\,dx = \frac{x}{n^2}(2\sin nx - nx\cos nx) + \frac{2}{n^3}\cos nx + C$

126. $\int x^2\cos nx\,dx = \frac{x}{n^2}(nx\sin nx + 2\cos nx) - \frac{2}{n^3}\sin nx + C$

127. $\int \sin^n x\,dx = -\frac{\sin^{n-1}x\cos x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}x\,dx$

128. $\int \cos^n x\,dx = \frac{\cos^{n-1}x\sin x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}x\,dx$

129. $\int \frac{dx}{\sin^n x} = -\frac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1}x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\sin^{n-2}x}$

130. $\int \frac{dx}{\cos^n x} = \frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1}x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\cos^{n-2}x}$

131. $\int \cos^m x\sin^n x\,dx = \frac{\cos^{m-1}x\sin^{m-1}x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\int \cos^{m-2}x\sin^n x\,dx$

132. $\int \cos^m x\sin^n x\,dx = -\frac{\sin^{n-1}x\cos^{m+1}x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}\int \cos^m x\sin^{n-2}x\,dx$

133. $\int \frac{dx}{\cos^m x\sin^n x} = \frac{1}{(m-1)\sin^{n-1}x\cos^{m-1}x} + \frac{m+n-2}{m-1}\cdot\int \frac{dx}{\cos^{m-2}x\sin^n x}$

134. $\int \frac{dx}{\cos^m x\sin^n x} = -\frac{1}{(n-1)\sin^{n-1}x\cos^{m-1}x} + \frac{m+n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\cos^m x\sin^{n-2}x}$

135. $\int \frac{\cos^m x}{\sin^n x}dx = -\frac{\cos^{m+1}x}{(n-1)\sin^{n-1}x} - \frac{m-n+2}{n-1}\int \frac{\cos^m x}{\sin^{n-2}x}dx$

136. $\int \frac{\cos^m x}{\sin^n x}dx = \frac{\cos^{m-1}x}{(m-n)\sin^{n-1}x} + \frac{m-1}{m-n}\int \frac{\cos^{m-2}x}{\sin^n x}dx$

137. $\int \frac{\sin^n x}{\cos^m x}dx = \frac{\sin^{n+1}x}{(m-1)\cos^{m-1}x} - \frac{n-m+2}{m-1}\int \frac{\sin^n x}{\cos^{m-2}x}dx$

138. $\int \frac{\sin^n x}{\cos^m x}dx = -\frac{\sin^{n-1}x}{(n-m)\cos^{m-1}x} + \frac{n-1}{n-m}\int \frac{\sin^{n-2}x}{\cos^m x}dx$

139. $\int e^{ax}\cos^n x\,dx = \frac{e^{ax}\cos^{n-1}x(a\cos x + n\sin x)}{a^2+n^2} + \frac{n(n-1)}{a^2+n^2}\int e^{ax}\cos^{n-2}x\,dx$

140. $\int e^{ax}\sin^n x\,dx = \frac{e^{ax}\sin^{n-1}x(a\sin x - n\cos x)}{a^2+n^2} + \frac{n(n-1)}{a^2+n^2}\int e^{ax}\sin^{n-2}x\,dx$

141. $\int x^m\cos ax\,dx = \frac{x^{m-1}}{a^2}(ax\sin ax + m\cos ax) - \frac{m(m-1)}{a^2}\int x^{m-2}\cos ax\,dx$

142. $\int x^m\sin ax\,dx = \frac{x^{m-1}}{a^2}(m\sin ax - ax\cos ax) - \frac{m(m-1)}{a^2}\int x^{m-2}\sin ax\,dx$

143. $\int \arcsin x\,dx = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$

144. $\int \arccos x\,dx = x\arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$

145. $\int \operatorname{arctg} x \mathrm{d}x = x \operatorname{arctg} x - \ln\sqrt{1+x^2} + C$

146. $\int \operatorname{arccot} x \mathrm{d}x = x \operatorname{arccot} x + \ln\sqrt{1+x^2} + C$

147. $\int \operatorname{arcsec} x \mathrm{d}x = x \operatorname{arcsec} x - \ln|x + \sqrt{x^2-1}| + C$

148. $\int \operatorname{arccsc} x \mathrm{d}x = x \operatorname{arccsc} x + \ln|x + \sqrt{x^2-1}| + C$

Ⅱ.拉普拉斯变换简表

序　号	像原函数 $f(t)$	像函数 $F(s)$	
1	1	$\frac{1}{s}$	$(s>0)$
2	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$(s>a)$
3	$t^m(m>-1)$	$\frac{\Gamma(m+1)}{s^{m+1}}$	$(s>0)$
4	$t^m\mathrm{e}^{at}(m>-1)$	$\frac{\Gamma(m+1)}{(s-a)^{m+1}}$	$(s>a)$
5	$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$(s>0)$
6	$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$(s>0)$
7	$\operatorname{sh}\omega t$	$\frac{\omega}{s^2-\omega^2}$	$(s>0)$
8	$\operatorname{ch}\omega t$	$\frac{s}{s^2-\omega^2}$	$(s>0)$
9	$t\sin\omega t$	$\frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$	$(s>0)$
10	$t\cos\omega t$	$\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$	$(s>0)$
11	$t\operatorname{sh}\omega t$	$\frac{2\omega s}{(s^2-\omega^2)^2}$	$(s>0)$
12	$t\operatorname{ch}\omega t$	$\frac{s^2+\omega^2}{(s^2-\omega^2)^2}$	$(s>0)$
13	$\mathrm{e}^{\lambda t}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(s-\lambda)^2+\omega^2}$	$(s>\lambda)$
14	$\mathrm{e}^{\lambda t}\cos\omega t$	$\frac{s-\lambda}{(s-\lambda)^2+\omega^2}$	$(s>\lambda)$
15	$t\mathrm{e}^{\lambda t}\sin\omega t$	$\frac{2\omega(s-\lambda)}{[(s-\lambda)^2+\omega^2]^2}$	$(s>\lambda)$
16	$t\mathrm{e}^{\lambda t}\cos\omega t$	$\frac{(s-\lambda)^2-\omega^2}{[(s-\lambda)^2+\omega^2]^2}$	$(s>\lambda)$
17	$\sin^2 t$	$\frac{1}{2}(\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+4})$	$(s>0)$
18	$\cos^2 t$	$\frac{1}{2}(\frac{1}{s}+\frac{s}{s^2+4})$	$(s>0)$
19	$\sin\omega t\ \sin\lambda t$	$\frac{2\omega\lambda s}{[s^2+(\omega+\lambda)^2][s^2+(\omega-\lambda)^2]}$	$(s>0)$
20	$\mathrm{e}^{at}-\mathrm{e}^{bt}$	$\frac{a-b}{(s-a)(s-b)}$	$(s>a$ 且 $s>b)$
21	$a\mathrm{e}^{at}-b\mathrm{e}^{bt}$	$\frac{(a-b)s}{(s-a)(s-b)}$	$(s>a$ 且 $s>b)$
22	$\frac{1}{a}\sin at-\frac{1}{b}\sin bt$	$\frac{b^2-a^2}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}$	$(s>0)$
23	$\cos at-\cos bt$	$\frac{(b^2-a^2)s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}$	$(s>0)$
24	$\frac{1}{a^2}(1-\cos at)$	$\frac{1}{s(s^2+a^2)}$	$(s>0)$

Ⅲ.希腊字母表

字 母		读 音	字 母		读 音	字 母		读 音
Α	α	alpha	Ι	ι	iota	Ρ	ρ	rho
Β	β	beta	Κ	κ	kappa	Σ	σ	sigma
Γ	γ	gamma	Λ	λ	lambda	Τ	τ	tau
Δ	δ	delta	Μ	μ	mu	Υ	υ	upsilon
Ε	ϵ	epsilon	Ν	ν	nu	Φ	φ	phi
Ζ	ζ	zeta	Ξ	ξ	xi	Χ	χ	chi
Η	η	eta	Ο	o	omicron	Ψ	ψ	psi
Θ	θ	theta	Π	π	pi	Ω	ω	omega

Ⅳ.泊松分布表

$$1-F(c-1)=\sum_{K=0}^{\infty}\frac{\lambda^{k}}{k!}e^{-\lambda}$$

c \ λ	0.001	0.002	0.003	0.004	0 005	0.006	0.007	0.008	0.009	0.010
0	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000
1	0.0009295	0.0019980	0.0029955	0.0039920	0.0049875	0.0059820	0.0069756	0.0079681	0.0089596	0.0099502
2	.0000005	.0000020	.0000045	.0000080	.0000125	.0000179	.0000244	.0000318	.0000403	.0000497
3							.0000001	.0000001	.0000001	.0000002

c \ λ	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.10	0.11
0	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000
1	0.0198013	0.0295545	0.0392106	0.0487706	0.0582355	0.0676062	0.0788837	0.0860688	0.0951626	0.1041659
2	.0001973	.0004411	.0007790	.0012091	.0017296	.0023386	.0030343	.0038150	.0046788	.0056241
3	.0000013	.0000044	.0000104	.0000201	.0000344	.0000542	.0000804	.0001136	.0001547	.0002043
4			.0000001	.0000003	.0000005	.0000009	.0000016	.0000025	.0000038	.0000056
5										.0000001

c \ λ	0.12	0.13	0.14	0.15	0.16	0.17	0.18	0.19	0.20	0.21
0	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000
1	0.1130796	0.1219046	0.1306418	0.1392920	0.1478562	0.1563352	0.1647298	0.1730469	0.1812692	0.1894158
2	.0066491	.0077522	.0089316	.0101858	.0115132	.0129122	.0143812	0159187	.0175231	.0191931
3	.0002633	.0003323	.0004119	.0005029	.0006058	.0007212	.0008498	.0009920	.0011485	.0013197
4	.0000079	.0000107	.0000143	.0000187	.0000240	.0000304	.0000379	.0000467	.0000568	.0000685
5	.0000002	.0000003	.0000004	.0000006	.0000008	.0000010	.0000014	.0000018	.0000023	.0000029
6								.0000001	.0000001	.0000001

c \ λ	0.22	0.23	0.24	0.25	0.26	0.27	0.28	0.29	0.30	0.40
0	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000
1	0.1974812	0.2054664	0.2133721	0.2211992	0.2289484	0.2366205	0.2442163	0.2517364	0.2591818	0.3296800
2	.0209271	.0227237	.0245315	.0264990	.0284750	.0305080	.0325968	.0347400	.0369363	.0615519
3	.0015060	.0017083	.0019266	.0021615	.0024135	.0026829	.0029701	.0032755	.0035995	.0079263
4	.0000819	.0000971	.0001142	.0001334	.0001548	.0001786	.0002049	.0002339	.0002658	.0007763
5	.0000036	.0000044	.0000054	.0000066	.0000080	.0000096	.0000113	.0000134	.0000158	.0000612
6	.0000001	.0000002	.0000002	.0000003	.0000003	.0000004	.0000005	.0000006	.0000008	.0000040
7										.0000002

c \ λ	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4
0	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
1	0.393469	0.451188	0.503415	0.550671	0.593430	0.632121	0.667129	0.698806	0.727468	0.753403
2	.090204	.121901	.155805	.191208	.227518	.264241	.300971	.337373	.373177	.408167
3	.014388	.023115	.034142	.047423	.062857	.080301	.099584	.120513	.142888	.166502
4	.001752	.003358	.005753	.009080	.013459	.018988	.025742	.033769	.043095	.053725
5	.000172	.000394	.000786	.001411	.002344	.003660	.005435	.007746	.010663	.014253
6	.000014	.000039	.000090	.000184	.000343	.000594	.000968	.001500	.002231	.003201
7	.000001	.000003	.000009	.000021	.000043	.000083	.000149	.000251	.000404	.000622
8			.000001	.000002	.000005	.000010	.000020	.000037	.000064	.000107
9						.000001	.000002	.000005	.000009	.000016
10								.000001	.000001	.000002

c \ λ	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0	2.1	2.2	2.3	2.4
0	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
1	0.776870	0.798103	0.817316	0.834701	0.850431	0.864665	0.877544	.889197	.899741	0.909282
2	.442175	.475069	.506754	.537163	.566251	.593994	.620385	.645430	.669146	.691559
3	.191153	.216642	.242777	.269379	.296280	.323324	.350369	.377286	.403961	.430291
4	.065642	.078813	.093189	.108708	.125298	.142877	.161357	.180648	.200653	.221277
5	0.018576	0.023682	0.029615	0.036407	0.044081	0.052653	0.062126	0.072496	0.083751	0.095869
6	.004456	.006040	.007999	.010378	.013219	.016564	.020449	.024910	.029976	.035673
7	.000926	.001336	.001875	.002569	.003446	.004534	.005862	.007461	.009362	.011594
8	.000170	.000260	.000388	.000562	.000793	.001097	.001486	.001978	.002589	.003339
9	.000028	.000045	.000072	.000110	.000163	.000237	.000337	.000470	.000642	.000862
10	.000004	.000007	.000012	.000019	.000030	.000046	.000069	.000101	.000144	.000202
11	.000001	.000001	.000002	.000003	.000005	.000008	.000013	.000020	.000029	.000043
12					.000001	.000001	.000002	.000004	.000006	.000008
13								.000001	.000001	.000002

c \ λ	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9	3.0	3.1	3.2	3.3	3.4
0	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
1	0.917915	0.925726	0.932794	0.939190	0.944977	0.950213	0.954951	0.959238	0.963117	0.966627
2	.712703	.732615	.751340	.768922	.785409	.800852	.815298	.828799	.841402	.853158
3	.456187	.481570	.506376	.530546	.554037	.576810	.598837	.620096	.640574	660260
4	.242424	.263998	.285908	.308063	.330377	.352768	.375160	.397480	.419662	.441643
5	.108822	.122577	.137092	.152324	.168223	.184737	.201811	.219387	.237410	.255818
6	.042021	.049037	.056732	.065110	.074174	.083918	.094334	.105408	.117123	.129458
7	.014187	.017170	.020569	.024411	.028717	.033509	.038804	.044619	.050966	.057853
8	.004247	.005334	.006621	.008131	.009885	.011905	.014213	.016830	.019777	.023074
9	.001140	.001487	.001914	.002433	.003058	.003803	.004683	.005714	.006912	.008293
10	.000277	.000376	.000501	.000660	.000858	.001102	.001401	.001762	.002195	.002709
11	.000062	.000087	.000120	.000164	.000220	.000292	.000383	.000497	.000638	.000810
12	.000013	.000018	.000026	.000037	.000052	.000071	.000097	.000129	.000171	.000223
13	.000002	.000004	.000005	.000008	.000011	.000016	.000023	.000031	.000042	.000057
14		.000001	.000001	.000002	.000002	.000003	.000005	.000007	.000010	.000014
15						.000001	.000001	.000001	.000002	.000003
16										.000001

c \ λ	3.5	3.6	3.7	3.8	3.9	4.0	4.1	4.2	4.3	4.4
0	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
1	0.969803	0.972676	0.975276	0.977629	0.979758	0.981684	0.983427	0.985004	0.986431	0.987723
2	.864112	.874311	.883799	.892620	.900815	.908422	.915479	.922023	.928087	.933702
3	.679153	.697253	.714567	.731103	.746875	.761897	.776186	.789762	.802645	.814858
4	.463367	.484784	.505847	.526515	.546753	.566530	.585818	.604597	.622846	.640552
5	.274555	.293562	.312781	.332156	.351635	.371163	.390692	.410173	.429562	.448816
6	.142386	.155881	.169912	.184444	.199442	.214870	.230688	.246857	.263338	.280038

c \ λ	3.5	3.6	3.7	3.8	3.9	4.0	4.1	4.2	4.3	4.4
7	.065288	.073273	.081809	.090892	.100517	.110674	.121352	.132536	.144210	.156355
8	.026739	.030789	.035241	.040107	.045402	.051134	.057312	.063943	.071032	.078579
9	.009874	.011671	.013703	.015984	.018533	.021363	.024492	.027932	.031698	.035803
10	.003315	.004024	.004848	.005799	.006890	.008132	.009540	.011127	.012906	.014890
11	.001019	.001271	.001572	.001929	.002349	.002840	003410	.004069	.004825	.005688
12	.000289	.000370	.000470	.000592	.000739	.000915	.001125	.001374	.001666	.002008
13	.000076	.000100	.000130	.000168	.000216	.000274	000345	.000431	.000534	.000658
14	.000019	.000025	.000034	.000045	.000059	.000076	.000098	.000126	.000160	.000201
15	.000004	.000006	.000008	.000011	.000015	.000020	.000026	.000034	.000045	.000058
16	.000001	.000001	.000002	.000003	.000004	.000005	.000007	.000009	.000012	.000016
17				.000001	.000001	.000001	.000002	.000002	.000003	.000004
18									.000001	.000001

c \ λ	4.5	4.6	4.7	4.8	4.9	5.0	5.1	5.2	5.3	5.4
0	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
1	0.988891	0.989948	0.990905	0.991770	0.992553	0.993262	0.993903	0.994483	0.995008	0.995483
2	.938901	.943710	.948157	.952267	.956065	.959572	.962810	.965797	.968553	.971094
3	.826422	.837361	.847700	.857461	.866669	.875348	.883522	.891213	.898446	.905242
4	.657704	.674294	.690316	.705770	.720655	.734974	.748732	.761935	.774590	.786709
5	.467896	.486766	.505391	.523741	.541788	.559507	.576875	.593872	610482	.626689
6	.297070	.314240	.331562	.348994	.366499	.384039	.401580	.419087	.436527	.453868
7	.168949	.181971	.195395	.209195	.223345	.237817	.252580	.267607	.282866	.298329
8	.086586	.095051	.103969	.113334	.123138	.133372	.144023	.155078	.166523	178341
9	.040257	.045072	.050256	.055817	.061761	.068094	.074818	.081935	.089446	.097350
10	.017093	.019527	.022206	.025141	.028345	.031828	.035601	.039674	.044056	.048755
11	.006669	.007777	.009022	.010417	.011971	.013695	.015601	.017699	.020000	.022514
12	.002404	.002863	.003389	.003992	.004677	.005453	.006328	.007310	.008409	.009632
13	.000805	.000979	.001183	.001422	.001699	.002019	.002387	.002809	.003289	.003835
14	.000252	.000312	.000385	.000473	.000576	.000698	.000841	.001008	.001202	.001427
15	.000074	.000093	.000118	.000147	.000183	.000226	.000278	.000339	.000412	.000498
16	.000020	.000026	.000034	.000043	.000055	.000069	.000086	.000108	.000133	.000164
17	.000005	.000007	.000009	.000012	.000015	.000020	.000025	.000032	.000041	.000051
18	.000001	.000002	.000002	.000003	.000004	.000005	.000007	.000009	.000012	.000015
19			.000001	.000001	.000001	.000001	.000002	.000002	.000003	.000004
20								.000001	.000001	.000001

c \ λ	5.5	5.6	5.7	5.8	5.9	6.0	6.1	6.2	6.3	6.4
0	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
1	0.995913	0.996302	0.996654	0.996972	0.997261	0.997521	0.997757	0.997971	0.998164	0.998338
2	.973436	.975594	.977582	.979413	.981098	.982649	.984076	.985388	.986595	.987704
3	.911624	.917612	.923227	.928489	.933418	.938031	.942347	.946382	.950154	.953676
4	.798301	.809378	.819952	.830037	.839647	.848796	.857499	.865771	.873626	.881081
5	.642482	.657850	.672785	.687282	.701335	.714943	.728106	.740823	.753096	.764930
6	.471081	.488139	.505015	.521685	.538127	.554320	.570246	.585887	.601228	.616256
7	.313964	.329742	.345634	.361609	.377639	.393697	.409755	.425787	.441767	.457671
8	.190515	.203025	.215851	.228974	.242371	.256020	.269899	.283984	.298252	.312679
9	.105643	.114322	.123382	.132814	.142611	.152763	.163258	.174086	.185233	.196685
10	.053777	.059130	.064817	.070844	.077212	.083924	.090980	.098379	.106121	.114201
11	.025251	.028222	.031436	.034901	.038627	.042621	.046890	.051441	.056280	.061411
12	.010988	.012487	.014138	.015950	.017931	.020092	.022440	.024985	.027734	.030697
13	.004451	.005144	.005922	.006790	.007756	.008827	.010012	.011316	.012748	.014316
14	.001685	.001981	.002319	.002703	.003138	.003628	.004180	.004797	.005485	.006251
15	.000599	.000716	.000852	.001010	.001192	.001400	.001639	.001910	.002217	.002565
16	.000200	.000244	.000295	.000356	.000426	.000509	.000605	.000716	.000844	.000992
17	.000063	.000078	.000096	.000118	.000144	.000175	.000211	.000254	.000304	.000362
18	.000019	.000024	.000030	.000037	.000046	.000057	.000070	.000085	.000104	.000126

c \ λ	5.5	5.6	5.7	5.8	5.9	6.0	6.1	6.2	6.3	6.4
19	.000005	.000007	.000009	.000011	.000014	.000018	.000022	.000027	.000034	.000041
20	.000001	.000002	.000002	.000003	.000004	.000005	.000007	.000008	.000010	.000013
21			.000001	.000001	.000001	.000001	.000002	.000002	.000003	.000004
22							.000001	.000001	.000001	.000001

c \ λ	6.5	6.6	6.7	6.8	6.9	7.0	7.1	7.2	7.3	7.4
0	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
1	0.998497	0.998640	0.998769	0.998886	0.998992	0.999088	0.999175	0.999253	0.999324	0.999389
2	.988724	.989661	.990522	.991313	.992038	.992705	.993317	.993878	.994393	.994865
3	.956964	.960032	.962894	.965562	.968048	.970364	.972520	.974526	.976393	.978129
4	.888150	.894849	.901192	.907194	.912870	.918235	.923301	.928083	.932594	.936847
5	.776328	.787296	.797841	.807969	.817689	.827008	.835937	.844484	.852660	.860475
6	.630959	.645327	.659351	673023	.686338	.699292	.711881	.724103	.735957	.747443
7	.473476	.489161	.504703	.520084	.535285	.550289	.565080	.579644	.593968	.608038
8	.327242	.341918	.356683	.371514	.386389	.401286	.416183	.431059	.445893	.460667
9	.208427	.220443	.232716	.245230	.257967	.270909	.284036	.297332	.310776	.324349
10	.122616	.131361	.140430	.149816	.150510	.169504	.179788	.190350	.201180	.212265
11	.066839	.072567	.078598	.084934	.091575	.098521	.105771	.113323	.121175	.129323
12	.033880	.037291	.040937	.044825	.048961	.053350	.057997	.062906	.068081	.073526
13	.016027	.017889	.019910	.022097	.024458	.027000	.029730	.032655	.035782	.039117
14	.007100	.008038	.009072	.010208	.011452	.012811	.014292	.015901	.017645	.019531
15	.002956	.003395	.003886	.004434	.005042	.005717	.006463	.007285	.008188	.009178
16	.001160	.001352	.001569	.001816	.002094	.002407	.002757	.003149	.003586	.004071
17	.000430	.000509	.000599	.000703	.000822	.000958	.001113	.001288	.001486	.001709
18	.000151	.000182	.000217	.000258	.000306	.000362	.000426	.000500	.000584	.000680
19	.000051	.000062	.000075	.000090	.000108	.000130	.000155	.000184	.000218	.000258
20	.000016	.000020	.000024	.000030	.000037	.000044	.000054	.000065	.000078	.000093
21	.000005	.000006	.000008	.000010	.000012	.000014	.000018	.000022	.000026	.000032
22	.000001	.000002	.000002	.000003	.000004	.000005	.000006	.000007	.000009	.000011
23		.000001	.000001	.000001	.000001	.000001	.000002	.000002	.000003	.000003
24								.000001	.000001	.000001

c \ λ	7.5	7.6	7.7	7.8	7.9	8.0	8.1	8.2	8.3	8.4
0	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
1	0.999447	0.999500	0.999547	0.999590	0.999629	0.999665	0.999696	0.999725	0.999751	0.999777
2	.995299	.995696	.996060	.996394	.996700	.996981	.997238	.997473	.997689	.997886
3	.979743	.981243	.982636	.983930	.985131	.986246	.987280	.988239	.989129	.989953
4	.940855	944629	.948181	.951523	.954666	.957620	.960395	.963000	.965446	.967740
5	.867938	.875061	.881855	.888330	.894497	.900368	.905951	.911260	.916303	.921092
6	.758564	.769319	.779713	.789749	.799431	.808764	.817753	.826406	.834727	.842723
7	.621845	.635379	.648631	.661593	.674260	.686626	.698686	.710438	.721879	.733007
8	.475361	.489958	.504440	.518791	.532996	.547039	.560908	.574591	.588074	.601348
9	.338033	.351808	.365657	.379559	.393497	.407453	.421408	.435347	.449252	.463106
10	.223592	.235149	.246920	.258891	.271048	.283376	.295858	.308481	.321226	.334080
11	.137762	.146487	.155492	.164770	.174314	.184114	.194163	.204450	.214965	.225699
12	.079241	.085230	.091493	.098030	.104841	.111924	.119278	.126900	.134787	.142934
13	.042666	.046434	.050427	.054649	.059104	.063797	.068731	.073907	.079330	.084999
14	.021565	.023753	.026103	.028620	.031311	.034181	.037236	.040481	.043923	.047564
15	.010260	.011441	.012725	014118	.015627	.017257	.019014	.020903	.022931	.025103
16	.004608	.005202	.005857	.006577	.007367	.008231	.009174	.010201	.011316	.012525
17	.001959	.002239	.002552	.002901	.003289	.003713	.004192	.004715	.005291	.005922
18	.000790	.000915	.001055	.001215	.001393	.001594	.001819	.002070	.002349	.002659
19	.000303	.000355	.000415	.000484	.000562	.000650	.000751	.000864	.000992	.001136
20	.000111	.000132	.000156	.000184	.000216	000253	.000296	.000344	.000400	.000463
21	.000039	.000046	.000056	.000067	.000079	.000094	.000111	.000131	.000154	.000180
22	.000013	.000016	.000019	.000023	.000028	.000033	.000040	.000048	.000057	.000067

c \ λ	7.5	7.6	7.7	7.8	7.9	8.0	8.1	8.2	8.3	8.4
23	.000004	.000005	.000006	.000008	000009	.000011	.000014	.000017	.000020	.000024
24	.000001	.000002	.000002	.000002	.000003	.000004	.000005	.000006	.000007	.000008
25			.000001	.000001	.000001	.000001	.000001	.000002	.000002	.000003
26								.000001	.000001	.000001

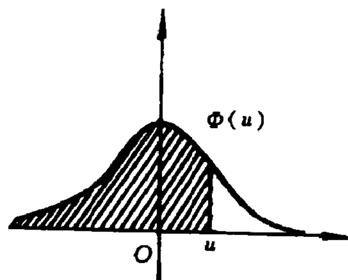
c \ λ	8.5	8.6	8.7	8.8	8.9	9.0	9.1	9.2	9.3	9.4
0	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
1	0.999797	0.999816	0.999833	0.999849	0.999864	0.999877	0.999888	0.999899	0.999909	0.999917
2	.998067	.998233	.998384	.998523	.998650	.998766	.998872	.998969	.999058	.999140
3	.990717	.991424	.992080	.992686	.993248	.993768	.994249	.994693	.995105	.995485
4	.969891	.971907	.973797	.975566	.977223	.978774	.980224	.981580	.982848	.984033
5	.925636	.929946	.934032	.937902	.941567	.945036	.948318	.951420	.954353	.957122
6	.850403	.857772	.864840	.871613	.878100	884309	.890249	.895926	.901350	.906529
7	.743822	.754324	.764512	.774390	.783958	793219	.802177	.810835	.819197	.827267
8	.614403	.627229	.639819	.652166	.664262	.676103	.687684	.699000	.710050	.720829
9	.476895	.490603	.504216	.517719	.531101	.544347	.557448	.570391	.583166	.595765
10	.347026	.360049	.373132	.386260	.399419	.412592	.425765	.438924	.452054	.465142
11	.236638	.247772	.259089	.270577	.282222	.294012	.305933	.317974	.330119	.342356
12	.151333	.159992	.168892	.178030	.187399	.196992	.206800	.216815	.227029	.237430
13	.090917	.097084	.103499	.110162	.117072	.124227	.131624	.139261	.147133	.155238
14	.051411	.055467	.059736	.064221	.068925	.073851	079001	.084376	.089978	.095807
15	.027425	.029902	.032540	.035343	.038317	.041466	.044795	.048309	.052010	.055903
16	.013833	.015245	.016767	.018402	.020157	.022036	024044	.026188	.028470	.030897
17	.006613	.007367	.008190	.009084	.010055	.011106	.012242	.013468	.014788	.016206
18	.003002	.003382	.003800	.004261	.004766	.005320	.005924	.006584	.007302	.008083
19	.001297	.001478	.001679	.001903	.002151	.002426	.002731	.003066	.003435	.003846
20	.000535	.000616	.000707	.000811	.000926	.001056	.001201	.001362	.001542	.001742
21	.000211	.000245	.000285	.000330	.000381	.000439	.000505	.000579	.000662	.000755
22	.000079	.000094	.000110	.000129	.000150	.000175	.000203	000235	.000272	.000314
23	.000029	.000034	.000041	.000048	.000057	.000067	.000078	.000092	.000107	.000125
24	.000013	.000012	.000014	.000017	.000021	.000025	.000029	.000034	.000041	.000048
25	.000003	.000004	.000005	.000006	.000007	.000009	.000010	.000012	.000015	.000018
26	000001	.000001	.000002	.000002	.000002	.000003	.000004	.000004	.000005	.000006
27			.000001	.000001	.000001	.000001	.000001	.000001	.000002	.000002
28									.000001	.000001

c \ λ	9.5	9.6	9.7	9.8	9.9	10.0
0	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
1	0.999925	0.999932	0.999939	0.999945	0.999950	0.999955
2	.999214	.999282	.999344	.999401	.999453	.999501
3	.995836	.996161	.996461	.996738	.996994	.997231
4	.985140	.986174	.987139	.988040	.988880	.989664
5	.959737	.962205	.964533	.966729	.968798	.970747
6	.911472	.916185	.920678	.924959	.929035	.932914
7	.835051	.842553	.849779	.856735	.863426	.869859
8	.731337	.741572	.751533	.761221	.770636	.779779
9	.608177	.620394	.632410	.644217	.655809	.667180
10	.478174	.491138	.504021	.516812	.529493	.542070
11	.354672	.367052	.379484	.391955	.404451	.416960
12	.248010	.258759	.269665	.280719	.291909	.303224
13	.163570	.172124	.180895	.189876	.199062	.208444
14	.101864	.108148	.114659	.121395	.128355	.135536
15	.059992	.064279	.068767	.073458	.078355	.083458
16	.033473	.036202	.039090	.042139	.045355	.048740
17	.017727	.019357	.021098	.022956	.024936	.027042
18	.008928	.009844	.010832	.011898	.013045	.014278

c \ λ	9.5	9.6	9.7	9.8	9.9	10.0
19	.004284	.004770	.005300	.005877	.006505	.007187
20	.001962	.002207	.002476	.002772	.003098	.003454
21	.000859	.000976	.001106	.001250	.001411	.001588
22	.000361	.000414	.000473	.000540	.000616	.000700
23	.000145	.000168	.000194	.000224	.000258	.000296
24	.000056	.000066	.000077	.000089	.000104	.000120
25	.000021	.000025	.000029	.000034	.000040	.000047
26	.000007	.000009	.000011	.000013	.000015	.000018
27	.000003	.000003	.000004	.000004	.000005	.000006
28	.000001	.000001	.000001	.000002	.000002	.000002
29				.000001	.000001	.000001

V. 标准正态分布表

$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{u} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad (u \geqslant 0)$$



u	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	u
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359	0.0
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753	0.1
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141	0.2
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517	0.3
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879	0.4
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224	0.5
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549	0.6
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7703	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852	0.7
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133	0.8
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389	0.9
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621	1.0
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830	1.1
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.90147	1.2
1.3	.90320	.90490	.90658	.90824	.90988	.91149	.91309	.91466	.91621	.91774	1.3
1.4	.91924	.92073	.92220	.92364	.92507	.92647	.92785	.92922	.93056	.93189	1.4
1.5	.93319	.93448	.93574	.93699	.93822	.93943	.94062	.94179	.94295	.94408	1.5
1.6	.94520	.94630	.94738	.94845	.94950	.95053	.95154	.95254	.95352	.95449	1.6
1.7	.95543	.95637	.95728	.95818	.95907	.95994	.96080	.96164	.96246	.96327	1.7
1.8	.96407	.96485	.96562	.96638	.96712	.96784	.96856	.96926	.96995	.97062	1.8
1.9	.97128	.97193	.97257	.97320	.97381	.97441	.97500	.97558	.97615	.97670	1.9
2.0	.97725	.97778	.97831	.97882	.97932	.97982	.98030	.98077	.98124	.98169	2.0
2.1	.98214	.98257	.98300	.98341	.98382	.98422	.98461	.98500	.98537	.98574	2.1
2.2	.98610	.98645	.98679	.98713	.98745	.98778	.98809	.98840	.98870	.98899	2.2
2.3	.98928	.98956	.98983	$.9^{2}0097$	$.9^{2}0358$	$.9^{2}0613$	$.9^{2}0863$	$.9^{2}1106$	$.9^{2}1344$	$.9^{2}1576$	2.3
2.4	$.9^{2}1802$	$.9^{2}2024$	$.9^{2}2240$	$.9^{2}2451$	$.9^{2}2656$	$.9^{2}2857$	$.9^{2}3053$	$.9^{2}3244$	$.9^{2}3431$	$.9^{2}3613$	2.4
2.5	$.9^{2}3790$	$.9^{2}3963$	$.9^{2}4132$	$.9^{2}4297$	$.9^{2}4457$	$.9^{2}4614$	$.9^{2}4766$	$.9^{2}4915$	$.9^{2}5060$	$.9^{2}5201$	2.5
2.6	$.9^{2}5339$	$.9^{2}5473$	$.9^{2}5604$	$.9^{2}5731$	$.9^{2}5855$	$.9^{2}5975$	$.9^{2}6093$	$.9^{2}6207$	$.9^{2}6319$	$.9^{2}6427$	2.6
2.7	$.9^{2}6533$	$.9^{2}6636$	$.9^{2}6736$	$.9^{2}6833$	$.9^{2}6928$	$.9^{2}7020$	$.9^{2}7110$	$.9^{2}7197$	$.9^{2}7282$	$.9^{2}7365$	2.7
2.8	$.9^{2}7445$	$.9^{2}7523$	$.9^{2}7599$	$.9^{2}7673$	$.9^{2}7744$	$.9^{2}7814$	$.9^{2}7882$	$.9^{2}7948$	$.9^{2}8012$	$.9^{2}8874$	2.8
2.9	$.9^{2}8134$	$.9^{2}8193$	$.9^{2}8250$	$.9^{2}8305$	$.9^{2}8389$	$.9^{2}8411$	$.9^{2}8462$	$.9^{2}8511$	$.9^{2}8559$	$.9^{2}8605$	2.9

u	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	u
3.0	$.9^{2}8650$	$.9^{2}8694$	$.9^{2}8736$	$.9^{2}8777$	$.9^{2}8817$	$.9^{2}8856$	$.9^{2}8893$	$.9^{2}8930$	$.9^{2}8965$	$.9^{2}8999$	3.0
3.1	$.9^{3}0324$	$.9^{3}0646$	$.9^{3}0957$	$.9^{3}1260$	$.9^{3}1553$	$.9^{3}1836$	$.9^{3}2112$	$.9^{3}2378$	$.9^{3}2636$	$.9^{3}2886$	3.1
3.2	$.9^{3}3129$	$.9^{3}3363$	$.9^{3}3590$	$.9^{3}3810$	$.9^{3}4024$	$.9^{3}4230$	$.9^{3}4429$	$.9^{3}4623$	$.9^{3}4810$	$.9^{3}4991$	3.2
3.3	$.9^{3}5166$	$.9^{3}5335$	$.9^{3}5499$	$.9^{3}5658$	$.9^{3}5811$	$.9^{3}5959$	$.9^{3}6103$	$.9^{3}6242$	$.9^{3}6376$	$.9^{3}6505$	3.3
3.4	$.9^{3}6631$	$.9^{3}6752$	$.9^{3}6869$	$.9^{3}6982$	$.9^{3}7091$	$.9^{3}7197$	$.9^{3}7299$	$.9^{3}7398$	$.9^{3}7493$	$.9^{3}7585$	3.4
3.5	$.9^{3}7674$	$.9^{3}7759$	$.9^{3}7842$	$.9^{3}7922$	$.9^{3}7999$	$.9^{3}8074$	$.9^{3}8146$	$.9^{3}8215$	$.9^{3}8282$	$.9^{3}8347$	3.5
3.6	$.9^{3}8409$	$.9^{3}8469$	$.9^{3}8527$	$.9^{3}8583$	$.9^{3}8637$	$.9^{3}8689$	$.9^{3}8739$	$.9^{3}8787$	$.9^{3}8834$	$.9^{3}8879$	3.6
3.7	$.9^{3}8922$	$.9^{3}8964$	$.9^{4}0039$	$.9^{4}0426$	$.9^{4}0799$	$.9^{4}1158$	$.9^{4}1504$	$.9^{4}1838$	$.9^{4}2159$	$.9^{4}2469$	3.7
3.8	$.9^{4}2765$	$.9^{4}3052$	$.9^{4}3327$	$.9^{4}3593$	$.9^{4}3848$	$.9^{4}4094$	$.9^{4}4331$	$.9^{4}4558$	$.9^{4}4777$	$.9^{4}4988$	3.8
3.9	$.9^{4}5190$	$.9^{4}5385$	$.9^{4}5573$	$.9^{4}5753$	$.9^{4}5926$	$.9^{4}6092$	$.9^{4}6253$	$.9^{4}6406$	$.9^{4}6554$	$.9^{4}6696$	3.9
4.0	$.9^{4}6833$	$.9^{4}6964$	$.9^{4}7090$	$.9^{4}7211$	$.9^{4}7327$	$.9^{4}7439$	$.9^{4}7546$	$.9^{4}7649$	$.9^{4}7748$	$.9^{4}7843$	4.0
4.1	$.9^{4}7934$	$.9^{4}8022$	$.9^{4}8106$	$.9^{4}8186$	$.9^{4}8263$	$.9^{4}8338$	$.9^{4}8409$	$.9^{4}8477$	$.9^{4}8542$	$.9^{4}8605$	4.1
4.2	$.9^{4}8665$	$.9^{4}8723$	$.9^{4}8778$	$.9^{4}8832$	$.9^{4}8882$	$.9^{4}8931$	$.9^{4}8978$	$.9^{5}0226$	$.9^{5}0655$	$.9^{5}1066$	4.2
4.3	$.9^{5}1460$	$.9^{5}1837$	$.9^{5}2199$	$.9^{5}2545$	$.9^{5}2876$	$.9^{5}3193$	$.9^{5}3497$	$.9^{5}3788$	$.9^{5}4066$	$.9^{5}4332$	4.3
4.4	$.9^{5}4587$	$.9^{5}4831$	$.9^{5}5065$	$.9^{5}5288$	$.9^{5}5502$	$.9^{5}5706$	$.9^{5}5902$	$.9^{5}6089$	$.9^{5}6268$	$.9^{5}6439$	4.4
4.5	$.9^{5}6602$	$.9^{5}6759$	$.9^{5}6908$	$.9^{5}7051$	$.9^{5}7187$	$.9^{5}7318$	$.9^{5}7442$	$.9^{5}7561$	$.9^{5}7675$	$.9^{5}7784$	4.5
4.6	$.9^{5}7888$	$.9^{5}7987$	$.9^{5}8081$	$.9^{5}8172$	$.9^{5}8258$	$.9^{5}8340$	$.9^{5}8419$	$.9^{5}8494$	$.9^{5}8566$	$.9^{5}8634$	4.6
4.7	$.9^{5}8699$	$.9^{5}8761$	$.9^{5}8821$	$.9^{5}8877$	$.9^{5}8931$	$.9^{5}8983$	$.9^{5}0320$	$.9^{6}0789$	$.9^{6}1235$	$.9^{6}1661$	4.7
4.8	$.9^{6}2067$	$.9^{5}2453$	$.9^{6}2822$	$.9^{6}3173$	$.9^{6}3508$	$.9^{6}3827$	$.9^{6}4131$	$.9^{6}4420$	$.9^{6}4696$	$.9^{6}4958$	4.8
4.9	$.9^{6}5208$	$.9^{5}5446$	$.9^{6}5673$	$.9^{6}5889$	$.9^{6}6094$	$.9^{6}6289$	$.9^{6}6475$	$.9^{6}6652$	$.9^{6}6821$	$.9^{6}6981$	4.9

Ⅵ．习题参考答案

第一章

一、1.(√)　2.(×)　3.(√)　4.(×)　5.(×)　6.(√)　7.(√)

二、1.(D)　2.(C)　3.(A)　4.(B)　5.(B)　6.(D)　7.(C)　8.(D)

三、1.[1,3]　2. 原点　3. 6π　4. $y=-\sqrt{x}(x\geqslant 0)$　5. $\frac{2}{3}$　6. 0　7. 4

8. $a=-7,b=6$　9. e^{-1}　10. $\frac{2}{5}$　11. 1　12. $a=1$

四、1.(1)$[1+\infty)$;(2)$[-4,5]$;(3)$S=2(\pi r^2+\frac{V}{r})$，r 是半径，其定义域为$(0,+\infty)$;(4)$N=N_0(1+r)^x$，其定义域为$[0,+\infty)$　2.$f(-2)=4,f(a+b)=\frac{|a+b-2|}{(a+b+1)}$　3.$y=e^u,u=v^3,v=\sin t\quad t=\frac{1}{x}$

4. 略　5.$f(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & 1\leqslant x\leqslant 2\\ 2(x-1), & 2<x\leqslant 3\end{cases}$　6.(1)$\frac{4}{3}$;(2)1;(3)1;(4)3;(5)4;(6)$\frac{1}{2}$;(7) e^3;(8)e^2;(9)1;(10)e^a　7.$\frac{a^2}{\sqrt{3}}$　8.(1)、(2)为无穷小量，(3)、(4)为无穷大量　9. 同阶，等价　10.$x\to 0$时，x^2为无穷小量，$x\to\infty$时，x^2为无穷大量；$x\to\pm$或$x\to\infty$时，$\frac{x^2-1}{x^3}$为无穷小量；$x\to 0$时，$\frac{x^2-1}{x^3}$为无穷大量；$x\to+\infty$时，e^{-x}为无穷小量，$x\to-\infty$时，e^{-x}为无穷大量　11.$\Delta y=52$　12.$a=-1,b=1$　13.$k=2$　14.略　15.略　16.(1)$W(0)=\frac{26}{31}g$,(2)$W_{\max}=26g$,(3)$t\approx 5$周　17.略

第二章

1.(1)$\frac{1}{2}$;(2)-2　2.(1)不可导;(2)可导,$f'(0)=0$　3. 略　4. 所求点为$(\frac{3}{2},\frac{9}{4})$

5. 提示：由$\frac{2x-y_0}{x-x_0}=2x$，采用根的判别式可得，$4(1+x_0)^2-8y_0>0$　6.(1)nx^{n-1};(2)$1+\frac{1}{x}$;(3)$(nx^{n-1}-1)\sin x+x^n\cos x$;(4)$\frac{x^2\sec^2x-2x\operatorname{tg}x}{x^4}$;(5)$\cos 2x\ln x+\frac{\sin 2x}{2x}$;(6)$\frac{(1+x)\sec x\operatorname{tg}x-\sec x}{(1+x)^2}$;(7)$-\csc x\cot x\ln x+\frac{\csc x}{x}$　7.(1)$y'=n^2x^{n-1}(1+x^n)^{n-1}$;(2)$2x\operatorname{tg}3x+3x^2\sec^2 3x$;(3)$\cot x-\frac{2x}{1+x^2}$;(4)$\frac{2}{(2x+1)\ln(2x+1)}$;(5)$2\sec x$;(6)$\frac{6\ln(\ln^3x)}{x\ln x}$　8.(1)$y'=-\frac{y(\sec^2x+\ln y)}{x}$;(2)$y'=\frac{x}{1-y}$

9.(1)$x^{\sin x}(\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x})$;(2)$x^{\operatorname{tg}x}(\sec^2x\ln x+\frac{\operatorname{tg}x}{x})$;(3)$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(x+1)(x+3)}{\sin x\cos x}}\cdot\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+3}-\cot x+\operatorname{tg}x\right)$;(4)$\sec^2x e^{\operatorname{tg}x}$;(5)$e^{x^x}\cdot x^x(1+\ln x)$;(6)$\frac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}$;(7)$(\operatorname{arctg}x)^x\left[x\ln(\operatorname{arctg}x)+\frac{x}{(1+x^2)\operatorname{arctg}x}\right]$;(8)$\operatorname{arctg}(\ln x)+\frac{1}{1+\ln^2x}$　10.(1)$(\ln 5)^n\cdot 5^x$;(2)$ab^n\cos(x+n\cdot\frac{\pi}{2})$;(3)$(-1)^{n-1}(n-1)!\ x^{-n}$;　11.(1)$\frac{ay-x^2}{y^2+ax}$;(2)$\frac{1-y\cos(xy)}{x\cos(xy)-1}$;(3)$-\frac{e^{xy}(1+xy)}{1+\sin y+x^2e^{xy}}$;　(4)$\frac{1+(xy)^2-y}{1+x+(xy)^2}$

12.(1)$dy=\cos x e^{\sin x}dx$;(2)$dy=\frac{2e^{2x}}{\sqrt{1-e^{4x}}}dx$;(3)$dy=(1-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}})\cos(x+\arccos x)dx$;(4)$dy=\frac{2e^{2\operatorname{arctg}x}}{1+x^2}dx$　13.2.236，0.512，1.00025，0.002　14.略　15.(1)$\frac{a}{b}$;(2)1;(3)2;(4)$2\frac{1}{2}$;

(5)0;(6)1;(7)e^{-1};(8) $e^{-\frac{1}{6}}$;(9) e^{1}　　16.略　　17.(1)在$(-\infty,\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},+\infty)$ ↗,在$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ ↘,(2)在$(-\infty,\frac{3}{2})$ ↘,在$(\frac{3}{2},+\infty)$ ↗;(3)在$(-\infty,+\infty)$ ↗;(4)在$(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$ ↗,在$(-1,2)$ ↘　　18.(1)$x=0$时有极小值,$f(0)=0$;(2)$x=e^{-2}$时取得极小值,$f(e^{-2})=-\frac{2}{e}$;(3)$x=-1$时取得极大值,$f(-1)=0$,$x=1$时取得极小值,$f(1)=2$;(4)$x=2k\pi$时,取得极大值1;$x=2k\pi+\frac{\pi}{4}$时,取得极小值$\frac{\sqrt{2}}{2}$;$x=(2k+1)\pi+\frac{\pi}{4}$时,取得极大值$-\frac{\sqrt{2}}{2}$;$x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$时,取得极大值1;$x=(2k+1)\pi$时,取得极小值$-1$;$x=(2k+\frac{3}{2})\pi$时取极小值$-1$　　19.(1)最大值66, 最小值2;(2)最大值3,最小值1;(3)最大值132,最小值0;(4)最大值2^7,最小值1　　20.$(x_2y_3+x_3y_1+x_1y_2)-(y_1x_2+y_2x_3+y_3x_1)$的绝对值　　21.(1)$a+b$;(2)$a\cdot b$　　22.$a=-\frac{3}{2}$,$b=\frac{9}{2}$时　　23.略
24.$t=\frac{1}{0.82}(-\ln 0.18)$;$t=\frac{1}{0.41}(-\ln 0.18)$　　25.(1) 凹区间:$(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}a)\cup(\frac{\sqrt{3}}{3}a,+\infty)$;凸区间:$(-\frac{\sqrt{3}}{3}a,\frac{\sqrt{3}}{3}a)$,拐点:$\pm\frac{\sqrt{3}}{3}a$;(2)凹区间:$(2k\pi-\pi,2k\pi)$;凸区间:$(2k\pi,2k\pi+\pi)$;拐点:$k\pi$;(3)$(-\infty,+\infty)$上都是凹函数　　26.略

第三章

1～2略　　3.(1)$x-x^3+C$;(2)$\frac{2^x}{\ln 2}+\frac{1}{3}x^3+C$;(3)$\frac{2}{3}x\sqrt{x}+2\sqrt{x}+C$;(4)$\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-2x^{\frac{3}{2}}+C$;(5)$\mathrm{arctg}x-x+C$;(6)$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right|-x+C$;(7)$\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\sin x+C$;(8)$-\cot x-x+C$;(9)$\frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}}+4x^{-\frac{1}{4}}+C$;(10)$e^x-x+C$;(11)$\sin x+\cos x+C$;(12)$-\frac{1}{x}-\mathrm{arctg}x+C$;(13)$\mathrm{tg}x-\mathrm{ctg}x+C$;(14)$\sin x+C$;(15)$x-\cos x+\frac{1}{2}\sin x+C$　　4.(1)$-\frac{2}{7}(2-x)^{\frac{7}{2}}+C$;(2)$\frac{1}{2(1-2x)}+C$;(3)$\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\sqrt{\frac{3}{2}}x+C$;(4)$-\cot\frac{x}{2}+C$;(5)$\frac{a^{3x}}{3\ln a}+C\ (a>0)$;(6)$\ln|x^2-x+3|+C$;(7)$-e^{-x}-\frac{1}{2}e^{-2x}+C$;(8)$-\frac{1}{5}\cos 5x-x\sin 5a+C$;(9)$-\sqrt{1-x^2}+C$;(10)$\frac{1}{4}(1+x^3)^{\frac{4}{3}}+C$;(11)$\frac{1}{4}\mathrm{arctg}\frac{x^2}{2}+C$;(12)$2\mathrm{arctg}\sqrt{x}+C$;(13)$-\frac{1}{2}e^{-x^2}+C$;(14)$\frac{2}{\sqrt{\cos x}}+C$;(15)$-\frac{4}{3}(\cot x)^{\frac{3}{4}}+C$;(16)$\frac{1}{2}(\mathrm{arctg}x)^2+C$;(17)$\mathrm{arctg}e^x+C$;(18)$\ln\frac{1+x}{1-x}+C$;(19)$\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+3}\right|+C$;(20)$\mathrm{arctg}x-\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C$;(21)$\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{8}\sin 4x+C$;(22)$\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C$;(23)$\sin x-\frac{2}{3}\sin^3x+\frac{1}{5}\sin^5x+C$;(24)$\frac{1}{2}\mathrm{tg}^2x+\ln|\cos x|+C$;(25)$-e^{\frac{1}{x}}+C$;(26)$\frac{1}{3}(\ln x)^3+C$;(27)$e^{\sin x}+C$;(28)$\frac{1}{12}\ln\left|\frac{2+3x}{2-3x}\right|+C$;(29)$-\frac{1}{\arcsin x}+C$;(30)$\mathrm{arctg}(x-1)+C$;(31)$x+2\mathrm{arctg}e^x+C$;(32)$x+\ln|x^2-2x-3|+3\ln\left|\frac{x-3}{x+1}\right|+C$　　5.(1)$-\frac{3}{140}\times(9+12x+14x^2)(1-x)^{\frac{4}{3}}+C$;(2)$-\frac{2}{15}(32+8x+3x^2)\sqrt{2-x}+C$;(3)$\ln\left|\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right|+C$;(4)$(\mathrm{arctg}\sqrt{x})^2+C$;(5)$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+C$;(6)$\frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}+C$;(7)$\frac{1}{6}\ln|3x-\sqrt{9x^2-4}|+C$;(8)$\sqrt{x^2-a^2}-a\cdot\arccos\frac{a}{x}+C$;(9)$\sqrt{\sin x}(\frac{2}{3}\sin x-\frac{4}{7}\sin^3x+\frac{2}{11}\sin^5x+C)$;(10)$\frac{2}{3}(\ln x-2)\sqrt{1+\ln x}+C$;(11)$2(\ln|e^{-\frac{x}{2}}+1|-e^{-\frac{x}{2}})+C$;(12)$-\frac{1}{3}\cot^3x-\cot x+C$;(13)$3\sqrt[3]{x}-6\sqrt[6]{x}+6\ln(1+\sqrt[6]{x})+C$;

(14)$\frac{1}{3}(x^2-2)\sqrt{1+x^2}+C$　6.(1)$x\text{arctg}x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$;(2)$\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x-\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}+C\quad(n\neq-1)$;(3)$\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}(\ln^2x-\frac{4}{3}\ln x+\frac{8}{9})+C$;(4)$2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}-2e^{\sqrt{x}}+C$;(5)$x\ln|x+\sqrt{1+x^2}|-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+C$;(6)$x\sin x+\cos x+C$;(7)$-\frac{1}{2}e^{-2x}(x^2+x+\frac{1}{4})+C$;(8)$\frac{1}{2}(\sec x\cdot\text{tg}x+x)+C$;(9)$\frac{1}{2}[x\sin(\ln x)-x\cos(\ln x)]+C$;(10)$\frac{e^{ax}(a\sin bx-b\cos bx)}{a^2+b^2}$;(11)$\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C(a\neq0)$;(12)$x(\arcsin x)^2+2\arcsin x\cdot\sqrt{1-x^2}-2x+C$;(13)$-\cot x\cdot\ln(\sin x)-\cot x-x+C$;(14)$\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}x\sin2x+\frac{1}{8}\cos2x+C$

7.(1)$-\frac{x}{x+1}+C$;(2)$\ln|x^2(x+1)|+C$;(3)$\frac{1}{6}\ln\left|\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}\right|+\frac{1}{\sqrt3}\text{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt3}+C$;(4)$\ln\left(\frac{x+3}{x+2}\right)^2-\frac{3}{x+3}+C$;(5)$\frac{1}{6}\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2+4}\right)+C$;(6)$\ln\left|\frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}\right|-\text{arctg}x+\frac{1}{x^2+1}+C$　8.(1)$\text{tg}x-\sec x+C$;(2)$x-\ln(1+e^x)+C$;(3)$a\cdot\arcsin\frac{x}{a}-\sqrt{a^2-x^2}+C\quad(a\neq0)$;(4)$-\frac{1}{2}\text{arctg}x+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$;(5)$\arccos\frac{1}{x}+C$;(6)$\frac{1}{2}\ln|1+\text{tg}x|-\frac{1}{4}\ln(1+\text{tg}^2x)+\frac{1}{2}x+C$　9.(1)$m\approx\sum_{i=1}^{n}v(\xi_i)\Delta t_i$;(2)$m=\int_{T_0}^{T_1}v(t)\text{d}t$　10.$\frac{1}{3}$　11.略　12.(1)$\int_0^1x^2\text{d}x$ 较大;(2)$\int_1^2\ln x\text{d}x$ 较大

13.(1)$6\leqslant\int_1^4(x^2+1)\text{d}x\leqslant51$;(2)$\frac{1}{e}\leqslant\int_0^1e^{-x^2}\text{d}x\leqslant1$;(3)$\pi\leqslant\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi}(1+\sin^2x)\,\text{d}x\leqslant2\pi$　14.0,$\frac{\sqrt2}{2}$

15.(1)$5e^x$;(2)$-\sqrt{1+x^2}$;(3)$2x\sin^2(x^2+1)$;(4)$\frac{3x^2}{\sqrt{1+x^3}}-\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$　16.(1)$\frac{1}{2}$;(2)　$\frac{1}{2}$

17.极小值 $F(0)=0$　18.(1)$45\frac{1}{6}$;(2)$\frac{\pi}{6}$;(3)$\frac{1}{4}$;(4)$\frac{1}{2}(1-\ln2)$;(5)-2;(6)$\frac{1}{2}(e^{\frac{\pi}{2}}-1)$;(7)1;(8)$\frac{9-4\sqrt3}{36}\pi+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$　(9)$5(2^{\frac{1}{5}}-1)$;(10)$\frac{3}{2}$;(11)4;(12)$\frac{1}{6}$;(13)$\ln\frac{2e}{1+e}$;(14)$\frac{3}{16}\pi$;(15)$\frac{\pi}{6}$;(16)$\frac{a^4}{16}\pi$　19~20.略　21.梯形法:0.746;抛物线法:0.747　22. 5　23.$\frac{k}{12}b^4$　24.$10\frac{2}{3}$

25.$\frac{9}{4}$　26.$\frac{8}{3}\pi a^2b$　27.$\frac{3}{10}\pi$　28.$160\pi^2$　29.$1+\frac{1}{\sqrt2}\ln(1+\sqrt2)$　30.$\bar{v}=\frac{a}{t_1}(1-e^{-kt_1})$

31.$e-1$　32.(1)$\frac{1}{3}$;(2)发散;(3)1;(4)$\frac{1}{2}$;(5)$\frac{1}{2}$;(6)π;(7)1;(8)发散　33.当 $k<1$ 时收敛于 $\frac{1}{1-k}(b-a)^{1-k}$;当 $k\geqslant1$ 时发散

第四章

1.(1)$D=\{(x\cdot y)\mid |x|\leqslant1,|y|\geqslant1\}$;(2)$D=\{(x\cdot y\cdot z)\mid x>0,y>0,z>0\}$;(3)$D=\{(x\cdot y)\mid\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant1\}$;(4)$D=\{(x\cdot y)\mid y^2>4(x-2)\}$　2.$x^2-y^2\leqslant-1$　3.(1)$-\frac{1}{4}$;(2)5;(3)∞

4.(1)$\frac{\partial z}{\partial x}=2e^{2x}\sin y,\frac{\partial z}{\partial y}=e^{2x}\cos y$;(2)$\frac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1},\frac{\partial z}{\partial y}=x^y\ln x$;(3)$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{x+\ln y},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{y(x+\ln y)}$;(4)$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y}{2\sqrt{x(1-xy^2)}},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-xy^2}}$;(5)$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y}{z}x^{\frac{y}{z}-1},\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{z}x^{\frac{y}{z}}\ln x,\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{y}{z^2}x^{\frac{y}{z}}\ln x$　5.(1)$\frac{\partial z}{\partial x}=\sqrt3,\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\sqrt3}{2}$;(2)$\frac{\partial z}{\partial x}=12,\frac{\partial z}{\partial y}=9(\ln^3+\frac{2}{3})$　6.略　7.略　8.(1)$\frac{\partial^2z}{\partial x^2}=\frac{6y^2-6x^2}{(x^2+y^2)^2},\frac{\partial^2z}{\partial y^2}=\frac{6x^2-6y^2}{(x^2+y^2)^2},\frac{\partial^2z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2z}{\partial y\partial x}=-\frac{12xy}{(x^2+y^2)^2}$;(2)$\frac{\partial^2z}{\partial x^2}=-\sin(x+2y),\frac{\partial^2z}{\partial y^2}=-4\sin(x+2y),\frac{\partial^2z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2z}{\partial y\partial x}$

$= -2\sin(x+2y)$;(3)$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$　　9.略　　10.(1)$\frac{dz}{dt}=-(e^t+e^{-t})$;(2)$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{y^2}\ln(3x-2y)+\frac{3x^2}{y^2(3x-2y)}$;$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{2x^2}{y^2}\ln(3x-2y)-\frac{2x^2}{y^2(3x-2y)}$;(3)$\frac{dz}{dt}=e^{\sin t+2t^3}(\cos t-6t^2)$;　(4)$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{y}\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial x}$,$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}\frac{\partial f}{\partial u}$(其中 $u=\frac{x}{y}$)　　11.(1)$dz=\frac{dx}{x+\ln y}+\frac{ay}{y(x+\ln y)}$;(2)$dz=\frac{e^{xy}[(ye^z+ye^y-e^x)dx+(xe^x+xe^y-e^y)dy]}{(e^x+e^y)^2}$;(3)$dz=\frac{dx}{\sqrt{y^2-x^2}}-\frac{x\,dy}{y\sqrt{y^2-x^2}}$　　12.各边长分别为:$-\frac{2\sqrt{3}}{3}a,\frac{2\sqrt{3}}{3}a,\frac{\sqrt{3}}{3}a$　　13.长宽高分别为:$\frac{2\sqrt{2}}{3}r,\frac{2\sqrt{2}}{3}r,\frac{1}{3}n$　　14.(1)极小值 $f(-1,1)=0$;

(2)$a>0$,极大值 $f(\frac{a}{3},\frac{a}{3})=\frac{a^3}{27}$;$a<0$,极小值 $f(\frac{a}{3},\frac{a}{3})=\frac{a^3}{27}$　　15.$x=\frac{1}{2}$时有极大值 $z=\frac{1}{4}$

16.在点$\left(\frac{ab^2}{a^2+b^2},\frac{a^2b}{a^2+b^2}\right)$处,有极值$\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$

第五章

1.(1)$\iint\limits_D (x+y)^2 d\sigma \geqslant \iint\limits_D (x+y)^3 d\sigma$;(2)$\iint\limits_D (x+y)^2 d\sigma \leqslant \iint\limits_D (x+y)^3 d\sigma$　　2.(1)$\int_0^1 dx\int_0^{1-x} f(x,y)dy$ 或$\int_0^1 dy\int_0^{1-y} f(x,y)dx$;　(2)$\int_0^4 dx\int_x^{2\sqrt{x}} f(x,y)dy$ 或 $\int_0^4 dy\int_{\frac{1}{4}y^2}^{y} f(x,y)dx$;　(3)$\int_{-a}^{a} dx\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x,y)dy$ 或 $\int_0^a dy\int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)dx$;(4)$\int_1^2 dx\int_{\frac{1}{x}}^{x} f(x,y)dy$或$\int_{\frac{1}{2}}^{1} dy\int_{\frac{1}{y}}^{2} f(x,y)dx+\int_1^2 dy\int_y^2 f(x,y)dx$

3.(1)$\int_0^1 dy\int_{\frac{1}{2}y}^{y} f(x,y)dx+\int_1^2 dy\int_{\frac{1}{2}y}^{1} f(x,y)dx$;(2)$\int_0^1 dy\int_{e^y}^{e} f(x,y)dx$;(3)$\int_0^4 dx\int_{\frac{1}{2}x}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy$;(4)$\int_0^2 dx\int_{\frac{1}{2}x}^{3-x} f(x,y)dy$　　4.(1)2;(2)$\frac{33}{140}$;(3)$-\frac{3}{2}\pi$;(4)$\frac{9}{4}$;(5)$|-\sin|$;(6)$\frac{13}{6}$　　5.(1)$\pi(e^4-1)$;(2)$\frac{256}{105}$;(3)$\frac{\pi}{4}(2\ln 2-1)$;(4)36π;(5)$-6\pi^2$;(6)$\frac{1}{3}a^3(\pi-\frac{4}{3})$　　6.$\frac{1}{21}$　　7.$\frac{\pi}{4}$　　8.$(\frac{a}{3},\frac{a}{3})$　　9.$I_x=\frac{8}{15}\rho$,　$I_y=\frac{32}{7}\rho$　　10.(1)$3\sqrt{10}\pi$;(2)$\sqrt{2}$;(3)$\frac{1}{12}(5\sqrt{5}+6\sqrt{2}-1)$;(4)$e^a(2+\frac{\pi}{4}a)-2$　　11.(1)0;(2)$-\frac{56}{15}$;(3)$-\frac{\pi}{2}a^3$;(4) 1)$\frac{34}{3}$; 2)11; 3)14

第六章

1.略　　2.(1)$e^y=\frac{1}{2}e^{2x}+C$;(2)$\cos 2y=-2(e^x+x)+C$;(3)$(4+y^2)(1+x^2)=C$;(4)$e^x(8-3y)=C$;(5)$x^2/y^2=2\ln x+C$;(6)$\ln\frac{y}{x}=1+Cx$;(7)$\ln(2x+y+z)=x+y+C$;(8)$(x-y)^2=C-2x$;(9)$y=x^2(\frac{1}{4}\sin 2x+C)$;(10)$y=x(\ln|\ln x|+C)$;(11)$y^2/x^2=2\ln|x|+4$;(12)$x(4-e^y)=-6$;(13)$y=\frac{1}{x}(e^x+2e)$;　(14)$y=\frac{1}{\cos x}(x+\frac{\pi}{2})$　　3.(1)$y=xe^x-2e^x+C_1x+C_2$;　(2)$y=C_1e^x-x+C_2$;(3)$y-x^2-\frac{1}{2}x+C_1x+C_2$;(4)$y=-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{4}C_1x^4+C_2$;(5)$y=-\ln|x+C_1|+C_2$;(6)$1+C_1y^2=4C_1^2(x+C_2)^2$;(7)$1-y^2=4x^2$;(8)$y=x+\frac{1}{3}x^3$　　4.(1)$y=C_1e^{3x}+C_2e^{-x}$;(2)$y=e^{-x}(C_1\cos\sqrt{2}x+C_2\sin\sqrt{2}x)$;(3)$y=(C_1+C_2x)e^{\frac{3}{2}x}$;(4)$y=C_1+C_2e^{-x}$;(5)$y=\frac{1}{5}e^{4x}+\frac{4}{5}e^{-x}$;(6)$y=(2-3x)e^{4x}$;(7)y

$=2\cos\frac{3}{2}x+\sin\frac{3}{2}x$　　5.(1) $y=2-4e^{x}-2e^{2x}$;(2) $y=2x+3\cos 4x$;(3) $y=3x^2e^{-2x}-2e^{-2x}+4xe^{-2x}$;(4) $y=-1+x+\frac{1}{2}x^2+\cos x-\sin x$;(5) $x=e^{-t}\cos t,y=2e^{-t}\cos t+e^{-t}\sin t$　6. $t=3.17$(小时)

7. $M(t)=m_0e^{-\frac{\ln 2}{14.3}t}$　　8. $k=\frac{1}{10}\ln\frac{0.276}{0.165}\approx 0.05$　　9. $t=\frac{\ln 2}{2}$(小时)前　　10. $Q=\frac{k}{a}+(M-\frac{k}{a})$ e^{at},平衡值为$\frac{k}{a}$

第七章

1.(1) $AB\bar{C}$;(2) $A+B+C$;(3) $A\bar{B}\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C$;(4) $\bar{A}\bar{B}\bar{C}+A\bar{B}\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C$　　2.(1)互不相容;(2) $\bar{A}=B+C\supset B$;(3)不可能事件　　3.(1) $A\subset B$ 且 $A\subset C$;(2) $A\supset B$ 且 $A\supset C$;(3) $AB=V$;(4) $A+B=U(\Omega)$　　4. A 与 B 不一定是对立事件,反之,A 与 B 互不相容事件　　5. $\frac{3}{20}$;$\frac{6}{20}$;$\frac{5}{20}$; $\frac{4}{20}$; $\frac{1}{20}$; 0; $\frac{1}{20}$; 0　　6.(1) $\frac{3}{10}$;(2) $\frac{1}{6}$　　7.(1) $\frac{1}{11}$;(2)0.09　　8.(1) $C_{20}^{3}\cdot 9^{17}/10^{20}$;(2) $C_{14}^{2}\cdot 9^{12}\cdot 10^{5}/10^{20}$
9.(1) 12×10^{-4};(2)0.95712　　10. $P(A\cdot B)\leqslant P(A)\leqslant P(A+B)\leqslant P(A)+P(B)$　　11.(1)0.56;(2)0.94;(3)0.38　　12. 0.382　　13. 0.88　　14. 0.146　　15. 0.35　　16. 64.5%　　17.(1)0.827;(2)方案 TV　　18. 0.0038　　19~20.略　　21. 0.98　　22.可以认为血清有预防作用

23.

X	0	1	2	3	4
p	0.6561	0.2916	0.0486	0.0036	0.0001

$$F(X)=\begin{cases}0, & \text{当 } x<0\\ 0.6561, & \text{当 } 0\leqslant x<1\\ 0.9477, & \text{当 } 1\leqslant x<2\\ 0.9963, & \text{当 } 2\leqslant x<3\\ 0.9999, & \text{当 } 3\leqslant x<4\\ 1, & \text{当 } 4\leqslant x\end{cases}$$

24.0.0031;0.0037　　25.0.5591　　26.0.384　　27.0.6　　28.(1) $\frac{1}{\pi}$;(2) $\frac{1}{3}$;(3)当 $x<-1$ 时 $F(x)=0$,当 $-1\leqslant X\leqslant 1$ 时 $F(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arcsin x$,当 $X>1$ 时 $F(x)=1$　　29.(1)1;(2)0.4;(3)当 $0\leqslant X\leqslant 1$ 时 $f(x)=2x$,其它时,$f(x)=0$　　30.0.968　　31.(1)0.96;(2) 6.15×10^{-6}　　32.131.4 至 154.8 之间　　34.(1) $\frac{1}{3}$;(2) $\frac{2}{3}$;(3) $\frac{35}{24}$　　35. $\frac{1}{3}$,$\frac{1}{18}$　　36.当 $X\leqslant -2$ 时,$f(x)=0$,当 $-2<X\leqslant 2$ 时 $f(x)=\frac{1}{4}$,当 $X>2$ 时,$f(x)=0$　　38. X 的分布列

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 0.3277 & 0.4096 & 0.2048 & 0.0512 & 0.0064 & 0.0003\end{pmatrix}$$

$E(X)=1,D(X)=0.8,\sqrt{D(X)}=0.894,CV(X)=0.894$　　39. $0,\frac{\sigma^2}{n}$　　40.(1)1/2;(2)1/2$(1-\frac{1}{e})$;(3)0,2;(4)1/2,2　　41.血红蛋白变异度较大

第八章

1.(1)40;(2)6;(3)1　　2.(1) $4abcdef$;(2) $4abc$　　3.(1) $a^n+(-1)^{n-1}b^n$;(2) $(-1)^{n-1}\frac{(n+1)!}{2}$
4.(1) $a=1,b=2,c=-2$;(2) $a=-3$ 或 $5,b=\pm 3,c=3$

5.(1) $\begin{bmatrix}-1 & 3 & 1 & 5\\ 8 & 2 & 8 & 2\\ 3 & 7 & 9 & 13\end{bmatrix}$;(2) $\begin{bmatrix}3 & 1 & 1 & -1\\ -4 & 0 & -4 & 0\\ -1 & -3 & -3 & -5\end{bmatrix}$;(3) $\begin{bmatrix}10 & 10 & 6 & 6\\ 0 & 4 & 0 & 4\\ 2 & 2 & 6 & 6\end{bmatrix}$

6.(1) $\begin{bmatrix} -5 & 6 & 7 \\ 10 & 2 & -6 \\ -2 & 17 & 10 \end{bmatrix}$;(2)[29];(3) $\begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 6 & 9 & 12 \\ 8 & 12 & 16 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$　　8. $(AB)^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} 9 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$　　9. 等式成立

10.(1) $\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$;(2) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;(3) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$;(4) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2} \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$;

11.(1) $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$;(2) $\begin{bmatrix} 2 & -23 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$;(3) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{4} & 6 \end{bmatrix}$

12.(1) $\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0.25 & -2.25 & 1.5 \\ 0.25 & 0.75 & -0.5 \end{bmatrix}$;(2) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -\frac{3}{2} & -3 & -\frac{5}{2} \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

13. 秩 $A=3$,秩 $B=2$

14.(1) $\begin{cases} x_1=\frac{3}{2}x_3-\frac{3}{4}x_4+\frac{5}{4} \\ x_2=\frac{3}{2}x_3+\frac{7}{4}x_4-\frac{1}{4} \\ x_3=x_3 \\ x_4=x_4 \end{cases}$;

(2)无解;(3)有唯一解,$x_1=1,x_2=1,x_3=2$

(4)无穷多解,$\begin{cases} x_1=x_1 \\ x_2=-5x_1-4x_4 \\ x_3=11x_1+9x_4+2 \\ x_4=x_4 \end{cases}$

15.(i)$\lambda\neq0,\lambda\neq1$ 时有唯一解;(ii)$\lambda=1$ 方程组有无穷多解;(iii)$\lambda=0$ 时方程组无解

16.(1)$\lambda=1$,特征向量 $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$;$\lambda=2$,特征向量 $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$。(2)特征值 $\lambda=4$,其特征向量是 $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

[General Information]
□□=□□□□□□
□□=□□□ □□□
□□=258
SS□=10479440
DX□=
□□□□=1999□08□□1□
□□□=□□□□□

□□
□□
□□
□□

□□